Ս. Մ. ՆԻԿՈԼՍԿԻ, Մ. Կ. ՊՈՏԱՊՈՎ,
Ն. Ն. ՌԵՇԵՏՆԻԿՈՎ, Ա. Վ. ՇԵՎԿԻՆ

ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎ

9-րդ դասարանի դասագիրք

Երևան
«Անտարես»
2012

ՀՏԴ
ԳՄԴ
Հ

Դասագիրքը հաստատված է Հայաստանի Հանրապետության կրթության և գիտության նախարարության կողմից

Никольский С.М. и др. Алгебра: учебник 8-го класса

Թարգմանությունը, փոփոխությունները և խմբագրումը՝ Ռ. Ավետիսյանի

Հ Հանրահաշիվ, 9-րդ դասարանի դասագիրք/թարգմանիչ և խմբագիր՝ Ռուբեն Ավետիսյան- Եր.: Անտարես, 2012 - 280 էջ:

Դասագիրքը համապատասխանեցված է առարկայական ծրագրին, կատարված են փոփոխություններ:

Պայմանական նշաններ՝
- առավել դժվար առաջադրանքներ
- առաջադրանքներ բանավոր աշխատանքների համար

ՀՏԴ
ԳՄԴ

ISBN

Թվային ֆունկցիաների հատկությունները

1.1 Թվային ֆունկցիայի գաղափարը

Ֆունկցիայի գաղափարին արդեն ծանոթ եք 7-րդ դասարանի հանրահաշվի դասընթացից:

Հիշեցնենք այդ սահմանումը: Այն տրվել է ռուս մաթեմատիկոս Ն.Ի. Լոբաչևսկու (1792-1856) և գերմանացի մաթեմատիկոս Լ. Դիրիխլեի (1805-1859) կողմից:

Ենթադրենք՝ տրված է թվերի ինչ-որ X բազմություն, և ինչ-որ որոշակի (f) օրենքի շնորհիվ՝ X բազմությունից յուրաքանչյուր x թվի համապատասխանեցված է մեկ որոշակի y թիվ: Այդ դեպքում ասում են, որ X-ի վրա տրված է $y = f(x)$ ֆունկցիա:

X բազմությունն անվանում են $\boldsymbol{y = f(x)}$ **ֆունկցիայի որոշման տիրույթ:** $x_0 \in$ X-ին համապատասխանող թիվն անվանում են ֆունկցիայի արժեք x_0 կետում և նշանակում $f(x_0)$: $f(x)$ ֆունկցիայի բոլոր արժեքների բազմությունն անվանում են $\boldsymbol{y = f(x)}$ **ֆունկցիայի արժեքների տիրույթ:**

Երբեմն, որպեսզի ընդգծվի, որ y-ը կախված է x-ից, գրում են $y(x)$, իսկ (1) գրառման կրճատման համար գրում են $f(x)$: x-ը անվանում են նաև արգումենտ կամ անկախ փոփոխական, իսկ y-ը՝ կախյալ փոփոխական:

Այսպիսով, որպեսզի տրվի ֆունկցիա, պետք է նշել միջոց (օրենք, կանոն), որի օգնությամբ $x \in X$ արգումենտի յուրաքանչյուր արժեքի համար կարելի է գտնել y-ին համապատասխան արժեք: Սովորաբար այդ օրենքը նշանակում են մեկ տառով, օրինակ՝ f տառով, և գրում.

$$y = f(x): \qquad (1)$$

Նշենք, որ x և y տառերի զույգի փոխարեն ֆունկցիայի սահմանման մեջ կարող են մասնակցել տառերի ուրիշ զույգեր: Օրինակ՝ X բազմության վրա որոշված f ֆունկցիան կարելի է գրառել ինչպես $y = f(x)$, $x \in X$, այնպես էլ՝

$y = f(u)$, $u \in X$ տեսքով, կամ նույնիսկ` $x = f(y)$, $y \in X$: Բոլոր այդ գրառումները բնութագրում են միևնույն ֆունկցիան:

f ֆունկցիայի որոշման տիրույթի և արժեքների տիրույթի համար ընդունված են համապատասխանաբար D (f) *և* E (f) *նշանակումները:*

Ֆունկցիայի սահմանումից հետևում է, որ $y = f(x)$ ֆունկցիան պետք է տրվի իր որոշման տիրույթի հետ միասին: Սակայն հաճախ, երբ ֆունկցիան տրված է անալիտիկ, այսինքն` բանաձևով, որոշման տիրույթը բացահայտ չեն նշում:

Այդ դեպքում ֆունկցիայի որոշման տիրույթ անվանում են անկախ փոփոխականի բոլոր այն արժեքների բազմությունը, որոնցից յուրաքանչյուրի համար ֆունկցիան ընդունում է իրական արժեքներ:

Օրինակ` $y = \dfrac{2x+1}{1-x^2}$ բանաձևով տրված ֆունկցիայի որոշման տիրույթը −1-ից և 1-ից տարբեր բոլոր իրական թվերի բազմությունն է, այսինքն`

$$D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty):$$

Բերենք ֆունկցիաների օրինակներ.

1) Ենթադրենք` յուրաքանչյուր $x$ իրական թվի համապատասխանության մեջ է դրված $3x$-ի հավասար $y$ թիվը: Այդ համապատասխանությամբ տրված է $R$ որոշման տիրույթով $y = 3x$ ֆունկցիան, որի արժեքների տիրույթը բոլոր իրական թվերի բազմությունն է` E(y) = R:

2) Ենթադրենք` յուրաքանչյուր x իրական թվի համապատասխանության մեջ է դրված x^2-ուն հավասար y թիվը: Այդ համապատասխանությամբ տրված է R որոշման տիրույթով $y = x^2$ ֆունկցիան, որի արժեքների տիրույթը, ինչպես գիտենք, $[0; +\infty)$ բազմությունն է:

3) Ենթադրենք` յուրաքանչյուր 0-ից տարբեր $x$ իրական թվի համապատասխանության մեջ է դրված $\dfrac{1}{x}$-ի հավասար $y$ թիվը: Այդ համապատասխանությամբ տրված է $y = \dfrac{1}{x}$ ֆունկցիան, որի որոշման տիրույթն է 0-ից տարբեր իրական թվերի բազմությունը, իսկ արժեքների տիրույթը`

$$E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty):$$

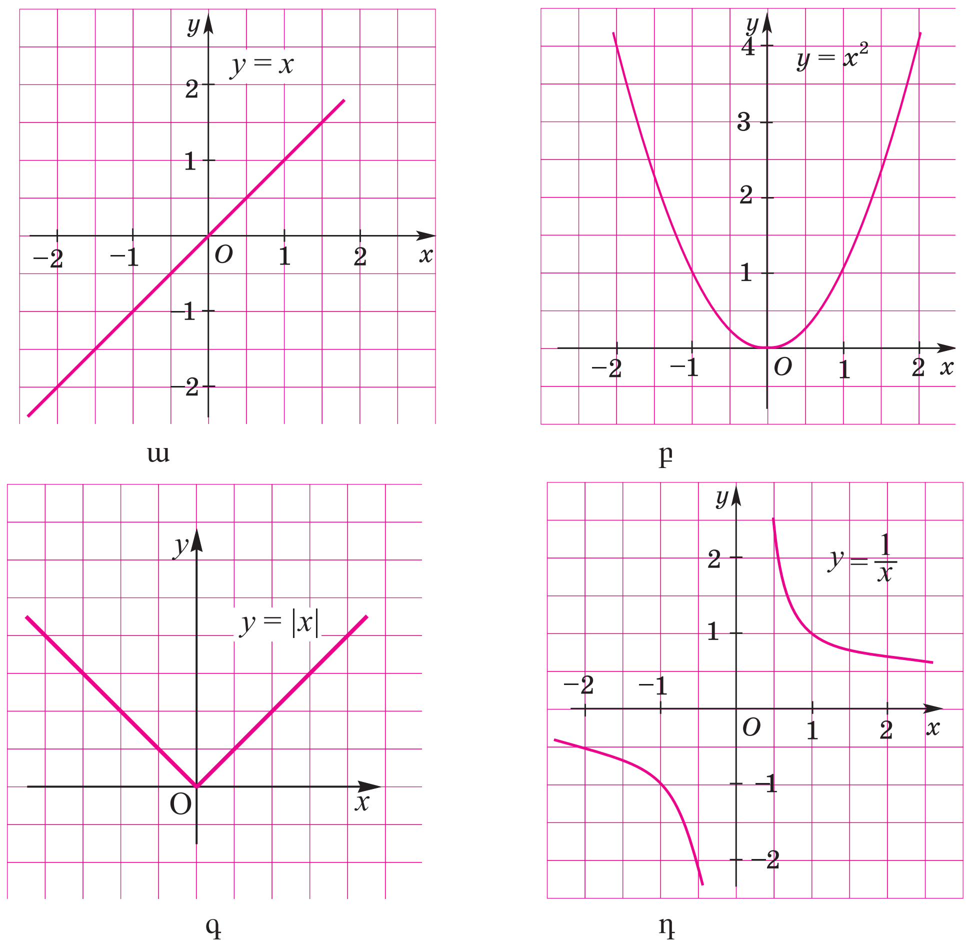
4) Եթե յուրաքանչյուր x իրական թվի համապատասխանության մեջ է դրված միևնույն c իրական թիվը, ապա ասում են, որ տրված է R որոշման տիրույթով $y = c$ ֆունկցիան, որի արժեքների տիրույթը, $\{c\}$ մեկ կետից բաղկացած բազմությունն է:

Ասում են նաև, որ 1-4 օրինակներում ֆունկցիաները տրված են $y = 3x$, $y = x^2$, $y = \dfrac{1}{x}$, $y = c$ բանաձևերով:

Բացի բանաձևից, ֆունկցիան կարելի է տալ նաև գրաֆիկով: Բանաձևով տրված յուրաքանչյուր ֆունկցիա դեկարտյան համակարգում ունի իր գրաֆիկը:

$y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկ անվանում են xOy կոորդինատային հարթության $(x, f(x))$ տեսքի բոլոր կետերի բազմությունը, որտեղ x-ը ֆունկցիայի որոշման տիրույթի կամայական թիվ է:

Դուք արդեն կառուցել եք $y = x$ (ուղիղ գիծ), $y = x^2$ (պարաբոլ), $y = \frac{1}{x}$ (հիպերբոլ) $y = |x|$ ֆունկցիաների գրաֆիկները (նկ. 8 ա, բ, գ, դ):



Նկ. 8

1. ա) Ձևակերպեք ֆունկցիայի սահմանումը: Բերեք ֆունկցիաների օրինակներ:
   բ) Ի՞նչն են անվանում $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկ:

Գտեք ֆունկցիայի որոշման տիրույթը (2-4).

2. ա) $y = x$, բ) $y = 3x - 7$, գ) $y = x^2$,
դ) $y = 3x^2 - 6x + 1$, ե) $y = \dfrac{1}{x}$, զ) $y = \dfrac{4}{x-1} + 2$:

3. ա) $y = |x|$, բ) $y = |x - 2|$, գ) $y = (x - 2)^2$,
դ) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$, ե) $y = \dfrac{|x|}{x}$, զ) $y = \dfrac{5}{|x| - 2}$:

4. ա) $y = \sqrt{x - 1}$, բ) $y = \sqrt{x + 1}$, գ) $y = \sqrt{2x - 1}$,
դ) $y = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$, ե) $y = \dfrac{1}{\sqrt{3x + 5}}$, զ) $y = \dfrac{x^2 + x}{x + 4}$:

⌜Գտեք ֆունկցիայի արժեքների տիրույթը.

5. ա) $f(x) = 2x$, $x \in [-1; 1]$; բ) $y = 3x + 2$, $x \in [-4; 0]$;
գ) $g(x) = x^2 + 1$, $x \in [0; 2]$; դ) $y = |x| - 1$, $x \in [-2; 2]$:⌟

1.2 Ֆունկցիայի աճման, նվազման, նշանապահպանման միջակայքերը և զրոները. մեծագույն և փոքրագույն արժեքները

X միջակայքի վրա որոշված $y = f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է այդ միջակայքում **աճող,** եթե ցանկացած $x_1, x_2, \in X$ թվերի համար $x_1 < x_2$ անհավասարությունից հետևում է

$$f(x_1) < f(x_2)$$

անհավասարությունը:

X միջակայքի վրա որոշված $y = f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է այդ միջակայքում նվազող, եթե ցանկացած $x_1, x_2, \in X$ թվերի համար $x_1 < x_2$ անհավասարությունից հետևում է

$$f(x_1) > f(x_2)$$

անհավասարությունը:

ՕՐԻՆԱԿ 1.

ա) $y = x$ ֆունկցիան $(-\infty; +\infty)$ միջակայքում աճող է,
բ) $y = x^2$ ֆունկցիան $[0; +\infty)$ միջակայքում աճող է,
գ) $y = x^2$ ֆունկցիան $(-\infty; 0]$ միջակայքում նվազող է:

Խմբագրի կողմից ավելացրած տեքստային և խնդիրները սկսվում են ⌜ և ավարտվում ⌟ նշաններով:

Աճող և նվազող ֆունկցիաները կոչվում են **խիստ մոնոտոն ֆունկցիաներ:**

X միջակայքի վրա որոշված $y = f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է այդ միջակայքում **չնվազող,** եթե ցանկացած $x_1, x_2, \in X$ թվերի համար $x_1 < x_2$ անհավասարությունից հետևում է

$$f(x_1) \leqslant f(x_2)$$

անհավասարությունը:

X միջակայքի վրա որոշված $y = f(x)$ ֆունկցիան կոչվում է այդ միջակայքում **չաճող,** եթե ցանկացած $x_1, x_2, \in X$ թվերի համար $x_1 < x_2$ անհավասարությունից հետևում է

$$f(x_1) \geqslant f(x_2)$$

անհավասարությունը:

ՕՐԻՆԱԿ 2.

ա) $y = \begin{cases} x^2 \text{ երբ } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ երբ } x < 0 \end{cases}$ ֆունկցիան $(-\infty; +\infty)$ միջակայքում չնվազող է,

բ) $y = \sqrt{x + |x|}$ ֆունկցիան $(-\infty; +\infty)$ միջակայքում չնվազող է,

գ) $y = \begin{cases} x^2 \text{ երբ } x < 0 \\ 0 \text{ երբ } x \geqslant 0 \end{cases}$ ֆունկցիան $(-\infty; +\infty)$ միջակայքում չաճող է,

դ) $y = \sqrt{|x| - x}$ ֆունկցիան $(-\infty; +\infty)$ միջակայքում չաճող է:

Աճող, նվազող, չաճող և չնվազող ֆունկցիաները կոչվում են **մոնոտոն ֆունկցիաներ:**

$y = f(x)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթին պատկանող x_0 թիվն անվանում են այդ ֆունկցիայի զրո, եթե $f(x_0) = 0$: Որպեսզի գտնենք $y = f(x)$ ֆունկցիայի բոլոր զրոները, պետք է գտնենք $f(x) = 0$ հավասարման բոլոր արմատները:

$y = f(x)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթին պատկանող X միջակայքն անվանում են այդ ֆունկցիայի նշանապահպանման միջակայք, եթե այդ միջակայքում ֆունկցիան ընդունում է միևնույն նշանի արժեքներ:

Որպեսզի գտնենք $y = f(x)$ ֆունկցիայի նշանապահպանման միջակայքերը, պետք է լուծենք $f(x) > 0$ և $f(x) < 0$ անհավասարումները:

Եթե գտնված են $y = f(x)$ ֆունկցիայի նշանապահպանման միջակայքերը, ապա ասում են, որ գտնված է այդ ֆունկցիայի նշանների բաշխումը:

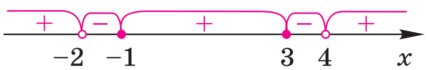
Ստորև բերված նկարներում հոծ կետերով պատկերված են ֆունկցիայի զրոները, իսկ շրջանիկներով՝ այն կետերը, որոնցում ֆունկցիան սահմանված չէ:

ՕՐԻՆԱԿ 3.

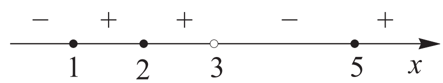
ա) $y=\sqrt{x}$ ֆունկցիան որոշված է $[0;+\infty)$ միջակայքում, ունի միակ $x_0=0$ զրո և դրական է $(0;+\infty)$ միջակայքի ցանկացած կետում:

բ) $y=\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x+2)(x-4)}$ ֆունկցիան որոշված է $(-\infty;-2)\cup(-2;4)\cup(4;+\infty)$ միջակայքերի միավորման վրա, ունի երկու $x_1=-1$ և $x_2=3$ զրոներ: Այդ ֆունկցիայի նշանների բաշխումը պատկերված է 102 նկարում:

գ) $y=\dfrac{(x-1)(x-2)^2(x-5)}{(x-3)^2}$ ֆունկցիան որոշված է $(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$ միջակայքերի միավորման վրա, ունի երեք $x_1=1$, $x_2=2$ և $x_3=5$ զրոներ: Այդ ֆունկցիայի նշանների բաշխումը պատկերված է 103 նկարում:



Նկ. 102



Նկ. 103

X բազմության վրա որոշված $y=f(x)$ ֆունկցիան անվանում են X բազմության վրա **ներքևից սահմանափակ,** եթե գոյություն ունի A թիվ, այնպիսին, որ $A\leqslant f(x)$ կամայական $x\in X$-ի համար:

Օրինակ՝ $y=x^2$ ֆունկցիան ներքևից սահմանափակ է իր որոշման R տիրույթում, քանի որ $x^2\geqslant 0$ կամայական x իրական թվի համար:

X բազմության վրա որոշված $y=f(x)$ ֆունկցիան անվանում են այդ բազմության վրա **վերևից սահմանափակ,** եթե գոյություն ունի B թիվ, այնպիսին, որ $f(x)\leqslant \mathrm{B}$ կամայական $x\in X$-ի համար:

Օրինակ՝ $y=-x^2$ ֆունկցիան վերևից սահմանափակ է $x\in \mathrm{R}$ բազմությունում, քանի որ $-x^2\leqslant 4$ կամայական x իրական թվի համար:

X բազմության վրա որոշված $y=f(x)$ ֆունկցիան անվանում են այդ բազմության վրա **սահմանափակ,** եթե գոյություն ունի $M>0$ թիվ, այնպիսին, որ $|f(x)|\leqslant M$ կամայական $x\in X$-ի համար:

Օրինակ՝ $y=x$ ֆունկցիան սահմանափակ է $x\in[-1;\ 1]$ տիրույթում, քանի որ կամայական $x\in[-1;\ 1]$ թվի համար $|x|\leqslant 1$:

Ասում են, որ $y=f(x)$ ֆունկցիան X բազմության վրա ընդունում է **ամենափոքր արժեքը** x_0 կետում, եթե $x_0\in X$ և $f(x_0)\leqslant f(x)$ ցանկացած $x\in X$-ի համար: $f(x_0)$ թիվն անվանում են $f(x)$-ի *փոքրագույն արժեք X բազմության վրա:*

Ասում են նաև, որ $y=f(x)$ ֆունկցիան X բազմության վրա ընդունում է **ամենամեծ արժեքը** x_0 կետում, եթե $x_0\in X$ և $f(x_0)\geqslant f(x)$ ցանկացած $x\in X$-ի համար: $f(x_0)$ թիվն անվանում են $f(x)$-ի *մեծագույն արժեք X բազմության վրա:*

ՕՐԻՆԱԿ 4. $y = x^2$ ֆունկցիան $[-1; 1]$ հատվածում ընդունում է $y = 1$ ամենամեծ արժեքը $x = 1$ և $x = -1$ կետում, իսկ $y = 0$ ամենափոքր արժեքը՝ $x = 0$ կետում:

ՕՐԻՆԱԿ 5. $y = x^2$ ֆունկցիան $(-\infty; +\infty)$ միջակայքում ընդունում է $y = 0$ ամենափոքր արժեքը $x = 0$ կետում, չի ընդունում ամենամեծ արժեքը և վերևից սահմանափակ չէ:

6. Դիցուք՝ $y = f(x)$ ֆունկցիան որոշված է X միջակայքի վրա: Ո՞ր դեպքում է այն կոչվում աճող, նվազող, խիստ մոնոտոն X միջակայքում:

7. Դիցուք՝ $y = f(x)$ ֆունկցիան որոշված է X միջակայքի վրա: Ո՞ր դեպքում է այն կոչվում չաճող, չնվազող, մոնոտոն X միջակայքում:

8.* ա) Ապացուցեք, որ եթե $y = f(x)$ ֆունկցիան որոշված է և աճող X միջակայքի վրա, ապա ցանկացած $x_1, x_2 \in X$ թվերի համար $f(x_1) > f(x_2)$ անհավասարությունից հետևում է $x_1 > x_2$ անհավասարությունը:
բ) Ապացուցեք, որ եթե $y = f(x)$ ֆունկցիան որոշված է և նվազող X միջակայքի վրա, ապա ցանկացած x_1, $x_2 \in X$ թվերի համար $f(x_1) > f(x_2)$ անհավասարությունից հետևում է $x_1 < x_2$ անհավասարությունը:
գ) Ապացուցե՛ք, որ եթե $y = f(x)$ ֆունկցիան որոշված է և խիստ մոնոտոն X միջակայքի վրա, ապա ցանկացած $x_1, x_2 \in X$ թվերի համար $f(x_1) = f(x_2)$ հավասարությունից հետևում է $x_1 = x_2$ հավասարությունը:

9. Ապացուցեք, որ $y = |x|$ ֆունկցիան
ա) $[0; +\infty)$ միջակայքում աճող է, բ) $(-\infty; 0]$ միջակայքում նվազող է:

10.* $y = \operatorname{sgn} x$ ֆունկցիան (կարդացվում է «սիգնում իքս») սահմանվում է այսպես. եթե $x > 0$, ապա $y = 1$, եթե $x = 0$, ապա $y = 0$, եթե $x < 0$, ապա $y = -1$: Գտեք ֆունկցիայի մոնոտոնության, նշանապահպանման միջակայքերը.
ա) $y = \operatorname{sgn} x$, բ) $y = \operatorname{sgn} \dfrac{1}{x}$:

11. k-ի ո՞ր արժեքների դեպքում է $y = kx + b$ ֆունկցիան
ա) աճող, բ) նվազող:

12. Ապացուցեք, որ $y = \sqrt{x}$ ֆունկցիան խիստ մոնոտոն է ամբողջ որոշման տիրույթում:

13. Գտեք ֆունկցիայի նշանապահպանման միջակայքերը.
ա) $y = -|x - 2| + 2$, բ) $y = |x + 4| - 1$:

14. Գտեք ֆունկցիայի զրոները.
ա) $y = 1 - x^2$; բ) $f(x) = 2x^2 - x - 1$; գ) $y = (x - 1)(x - 3)$;
դ) $y = \dfrac{4x - 2}{3x + 1}$; ե) $g(x) = |2 - x|$; զ) $f(x) = |3x - 1| - 5$:

15.° Ի՞նչ է նշանակում.
ա) ֆունկցիայի որոշման տիրույթ,
բ) ֆունկցիայի արժեքների տիրույթ:

16.° Դիցուք՝ $y = f(x)$ ֆունկցիան որոշված է X բազմության վրա: Ո՞ր դեպքում են ասում, որ ֆունկցիան այդ բազմության վրա սահմանափակ է վերևից, սահմանափակ է ներքևից, սահմանափակ է: Բերեք օրինակներ:

17. Ապացուցեք, որ $y = 1 - x$ ֆունկցիան $X = [-1;\ 1]$ բազմության վրա սահմանափակ է:

18. Ապացուցեք, որ ամբողջ որոշման տիրույթում $y = x^2$ ֆունկցիան վերևից սահմանափակ չէ:

19.* Ապացուցեք, որ եթե X բազմության վրա որոշված $y = f(x)$ ֆունկցիան X բազմության վրա սահմանափակ է և՛ վերևից, և՛ ներքևից, ապա այն X բազմության վրա սահմանափակ է:

Քառակուսային ֆունկցիա

1.3 $y = ax^2$ $(a > 0)$ ֆունկցիան

$$y = ax^2\ (a > 0) \tag{1}$$

ֆունկցիան որոշված է x-ի ցանկացած արժեքների համար, այսինքն՝

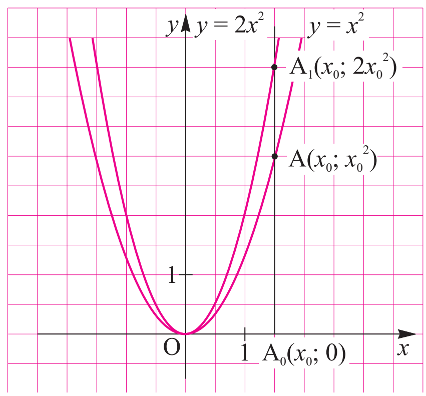
$$y = ax^2\ (a > 0)$$

ֆունկցիայի որոշման տիրույթը բոլոր իրական թվերի R բազմությունն է: Նրա հատկությունները շատ նման են մեզ արդեն հայտնի $y = x^2$ ֆունկցիայի հատկություններին և ապացուցվում են համանման ձևով: Թվարկենք դրանք.

1. *Եթե $x = 0$, ապա $y = 0$:*
2. *Եթե $x \neq 0$, ապա $y > 0$:*
3. *x-ի ոչ բացասական արժեքների համար (1) ֆունկցիան աճում է, իսկ x-ի ոչ դրական արժեքների համար՝ նվազում:*
4. *Եթե x-ը, դրական մնալով, անսահման աճում է, ապա y-ը անսահման աճում է, իսկ եթե բացասական x-ը այնպիսին է, որ դրա բացարձակ արժեքն անսահման աճում է, ապա y-ը անսահման աճում է: Այլ խոսքով՝ $y \to +\infty$, երբ $x \to +\infty$ և $x \to -\infty$:*
5. *(1) ֆունկցիան զույգ է, այդ իսկ պատճառով նրա գրաֆիկը համաչափ է y առանցքի նկատմամբ:*
6. *(1) ֆունկցիան անընդհատ է, ուստի, նրա գրաֆիկն անընդհատ կոր է, այսինքն՝ այն թղթի վրա կարելի է պատկերել մատիտով՝ առանց ձեռքը թղթից կտրելու:*

Դիտարկենք երկու ֆունկցիաներ՝ $y = x^2$ և $y = 2x^2$:

Դրանք երկուսն էլ որոշված են x-ի ցանկացած արժեքների համար: Ընտրենք x_0y դեկարտյան կոորդինատային համակարգը և x_0 կետը:



Նկ. 57

$A(x_0; x_0^2)$ կետը պատկանում է $y = x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկին, իսկ նույն աբսցիսն ունեցող $A_1(x_0; 2x_0^2)$ կետը՝ $y = 2x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկին (նկ. 57):

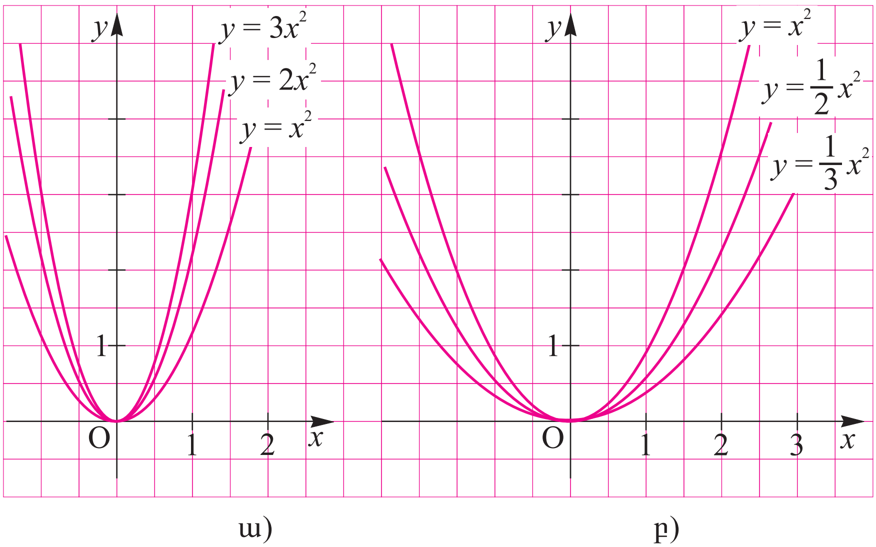
A_1 և A կետերի օրդինատները հարաբերում են, ինչպես 2 : 1, այսինքն՝ A_0A_1 հատվածը ստացվում է A_0A 2 անգամ ձգելով: Նույն դատողությունը կարելի էր տանել $y = x^2$, և $y = 2x^2$ ֆունկցիաների գրաֆիկների միևնույն աբսցիսն ունեցող ցանկացած երկու կետերի համար: Դրա համար էլ ասում են, որ $y = 2x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկն ստացվում է $y = x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկից՝ վերջինս ձգելով 2 անգամ Oy առանցքի ուղղությամբ (երկայնքով):

Դատելով նույն կերպ՝ կարելի է ցույց տալ, որ $y = ax^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը (եթե $a > 1$) ստացվում է $y = x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկից՝ վերջինս a անգամ ձգելով y առանցքի երկայնքով, իսկ եթե $0 < a < 1$, ապա՝ $\frac{1}{a}$-րդ անգամ սեղմելով:

Մենք տեսնում ենք, որ $y = ax^2$ $(a > 0)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը նման է $y = x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկին. այն նույնպես անվանում են պարաբոլ:

58. ա նկարում միևնույն xOy դեկարտյան կոորդինատային համակարգում պատկերված են $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = 3x^2$ պարաբոլները, իսկ 58. բ նկարում՝ $y = x^2$,

$y = \frac{1}{2}x^2$, $y = \frac{1}{3}x^2$ պարաբոլները:



Նկ. 58

20.° Ինչպե՞ս են անվանում $y = ax^2$ $(a > 0)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

21.° Ինչպե՞ս ստանալ $y = ax^2$ $(a > 0)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը $y = x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկից:

22.° Ի՞նչ հատկություններով է օժտված $y = ax^2 (a > 0)$ ֆունկցիան:

23. ա) Ֆունկցիան տրված է $y = 5x^2$ բանաձևով: Անվանեք կախյալ և անկախ փոփոխությունները: Հաշվեք $y(0)$, $y(1)$, $y(2)$, $y(3)$, $y(-1)$, $y(-2)$, $y(-3)$ թվերը: Լուծումը ձևավորեք աղյուսակի տեսքով:

Օրինակ.

x	0	1	2	3	–1	–2	–3
y	0	5					

բ) Ֆունկցիան տրված է $y = 0{,}25x^2$ բանաձևով: Հաշվեք $y(-2)$, $y(-4)$,

$y(10)$, $y\left(\frac{1}{3}\right)$, $y(-10)$, $y\left(-\frac{1}{3}\right)$ թվերը: Լուծումը ձևակերպեք աղյուսակի տեսքով:

24. Ֆունկցիան տրված է $y = \frac{3}{5}x^2$ բանաձևով: Ճի՞շտ են արդյոք հավասարությունները.

ա) $y(5) = 15$;
բ) $y(-10) = 80$;
գ) $y(3) = 5{,}6$;
դ) $y(-2) = 2{,}4$:

25. ա) Հաշվեք $y = 2x^2$ ֆունկցիայի արժեքները՝ x-ին տալով -3-ից մինչև 3 արժեքներ 0,5 քայլով: Լուծումը ձևավորեք աղյուսակի տեսքով:

բ) Հաշվեք $y = \frac{1}{5}x^2$ ֆունկցիայի արժեքները՝ x-ին տալով -1-ից 1 արժեքներ 0,2 քայլով: Լուծումը ձևավորեք աղյուսակի տեսքով:

26. ա) Տված է $y = 5x^2$ ֆունկցիան: x-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում ֆունկցիայի արժեքները հավասար են 5; 0,2; -2; 0:

բ) Տված է $y = \frac{1}{7}x^2$ ֆունկցիան: x-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում ֆունկցիայի արժեքները հավասար են -7; 7; 0; 1:

27.° ա) Կարո՞ղ է $y = ax^2$ $(a > 0)$ ֆունկցիան ընդունել բացասական արժեքներ:

բ) Ի՞նչ արժեքներ կարող է ընդունել $y = ax^2$ $(a > 0)$ ֆունկցիան x-ի տարբեր արժեքների դեպքում:

28. Տված են $y = x^2$ և $y = 3x^2$ ֆունկցիաները.

ա) x-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում են որոշված այդ ֆունկցիաները:

բ) Ի՞նչ արժեքներ են ընդունում այդ ֆունկցիաները $x > 0$, $x < 0$, $x = 0$ դեպքում:

գ) Հաշվեք այդ ֆունկցիաների արժեքները՝ x-ին տալով $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}$; 0,5; $-0{,}5$; 1; -1; $1\frac{1}{3}$; $-1\frac{1}{3}$; 2; -2 արժեքներ: Լուծումը ձևավորեք աղյուսակի տեսքով:

դ) Ո՞ր քառորդներում են դասավորված այդ ֆունկցիաների գրաֆիկները:

ե) Զո՞ւյգ են արդյոք այդ ֆունկցիաները: Դրական պատասխանի դեպքում նշեք համաչափության առանցքը:

զ) Կառուցեք $(x; x^2)$ և $(x; 3x^2)$ կետերը:

է) Կառուցեք այդ ֆունկցիաների գրաֆիկները՝ հաշվի առնելով նրանց անընդհատությունը:
ը) Գրաֆիկների օգնությամբ յուրաքանչյուր ֆունկցիայի համար որոշեք $y(1{,}5)$, $y\left(-2\frac{1}{3}\right)$, $y(-0{,}3)$-ը):
թ) Գրաֆիկների օգնությամբ որոշեք՝ ի՞նչ x-երի դեպքում են ֆունկցիաների արժեքները հավասար իրար 1; $1\frac{2}{3}$; 4,5:
Արդյունքները ստուգեք ֆունկցիաները տրվող բանաձևերի օգնությամբ:
ժ) x-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում են ֆունկցիաների արժեքները մեծ զրոյից, փոքր զրոյից, հավասար զրոյի:
ի) x-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում են ֆունկցիաների արժեքները մեծ 1-ից, փոքր 2-ից, փոքր −1-ից:

29. Տրված են $y = x^2$ և $y = 0{,}5x^2$ ֆունկցիաները: Պատասխանեք նախորդ վարժության հարցերին:

30. Նշեք հինգ կետերի աբսցիսներ, որոնց համար ավելի հարմար է հաշվել օրդինատները.

ա) $y = 4x^2$; բ) $y = \frac{1}{4}x^2$; գ) $y = \frac{1}{3}x^2$;
դ) $y = 1{,}5x^2$; ե) $y = 0{,}1x^2$; զ) $y = 5x^2$;
դ) $y = 10x^2$; ե) $y = 1\frac{2}{15}x^2$; զ) $y = 2{,}5x^2$:

Կառուցեք ֆունկցիաների գրաֆիկները՝ կոորդինատային առանցքների վրա ընտրելով հարմար միավոր հատվածներ (31-32).

31. ա) $y = 4x^2$; բ) $y = 0{,}25x^2$; գ) $y = \frac{1}{3}x^2$;
դ) $y = 1{,}5x^2$; ե) $y = \frac{1}{10}x^2$; զ) $y = 5x^2$:

32. ա) $y = 20x^2$; բ) $y = 400x^2$; գ) $y = 1000x^2$;
դ) $y = 0{,}01x^2$; ե) $y = 0{,}001x^2$; զ) $y = 0{,}0001x^2$:

33. Պատկանո՞ւմ են արդյոք
ա) A(2; 32), B(−3; 72), C(2,5; 18) կետերը $y = 8x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկին,

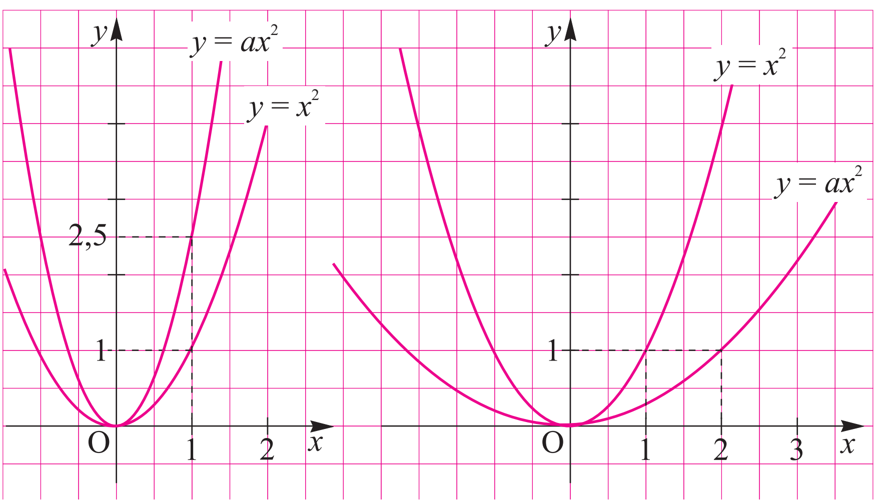
բ) A(5; 1,8), B(–10; 5), C(–8; 3,2) կետերը $y = 0{,}05x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկին:

34. ա) Տրված է $y = 3x^2$ ֆունկցիան: Գտեք a-ն, եթե (–2; a) կետը պատկանում է այդ ֆունկցիայի գրաֆիկին:
բ) Տրված է $y = 3x^2$ ֆունկցիան: (b; 12) կետը պատկանում է այդ ֆունկցիայի գրաֆիկին: Գտեք b-ն:
գ) (1; 8) կետը պատկանում է $y = ax^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկին: Գտեք a-ն:

35. Կառուցեք $y = 0{,}1x^2$ պարաբոլը.
ա) x-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում ֆունկցիան ընդունում է դրական արժեքներ:
բ) Ո՞ր x-երի համար է ֆունկցիայի արժեքը 2:
գ) Ի՞նչ արժեքներ է ընդունում y-ը, եթե $x > 0{,}5$;
դ) Ո՞ր x-երի համար է ֆունկցիան աճում և նվազում:

36. Կառուցեք $y = 2x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը.
ա) Ի՞նչ արժեքներ է ընդունում y-ը, եթե $x > 0$, $x < 0$, $x > 1$, $x > -2$:
բ) Ի՞նչ արժեքներ է ընդունում x-ը, եթե $y \geqslant 0$, $y \geqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 3$, $1 < y < 4$:

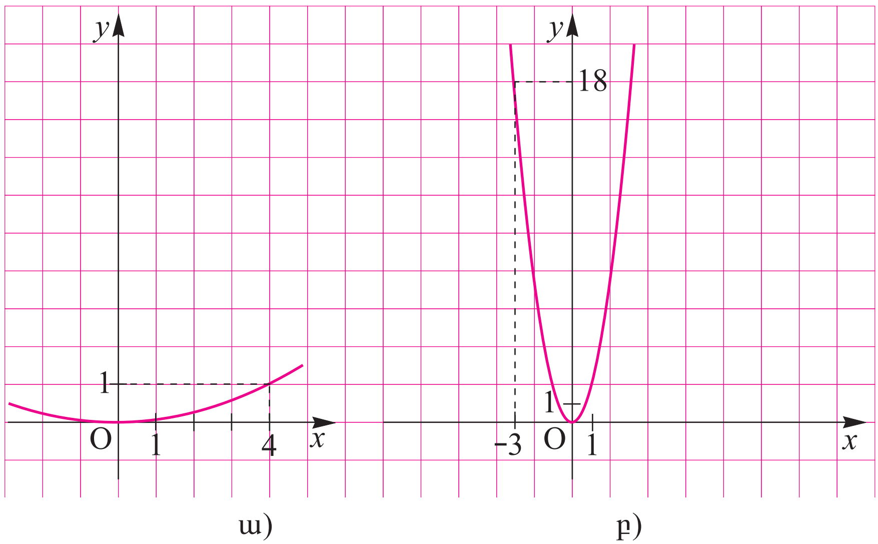
37. Նկ. 59-ում ներկայացված են $y = x^2$ և $y = ax^2$ ֆունկցիաների գրաֆիկները: Գտեք a-ն:



ա) բ)

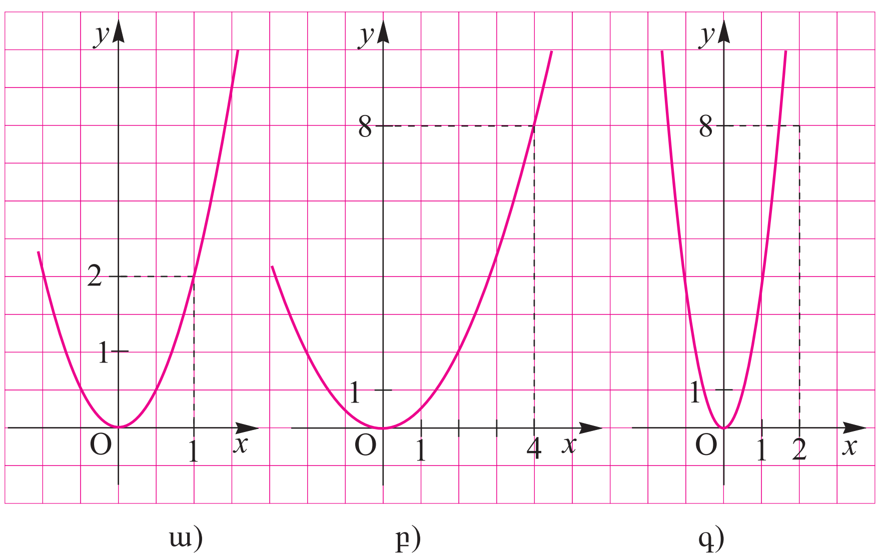
Նկ. 59

38. Նկ. 60-ում պատկերված է $y = ax^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը: Օգտագործելով նկարում բերված տվյալները՝ գտեք a-ն:



Նկ. 60

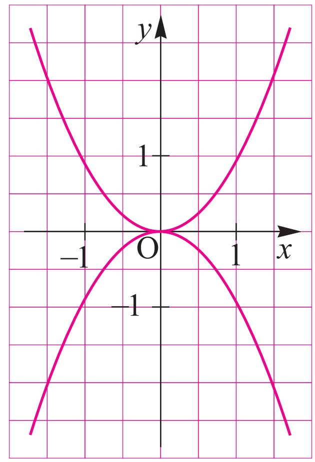
39. Նկ. 61-ում պատկերված է $y = ax^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը: Գտեք a-ն:



Նկ. 61

1.4 $y = ax^2$ ֆունկցիան ($a \neq 0$)

$y = ax^2$ ($a \neq 0$) ֆունկցիայի որոշման տիրույթը բոլոր իրական թվերի R բազմությունն է: Դիտարկենք $y = x^2$ և $y = -x^2$ ֆունկցիաները: Նրանց միևնույն x_0, $x_0 \neq 0$ աբսցիսն ունեցող կետերի օրդինատները բացարձակ արժեքով իրար հավասար են, բայց ունեն հակադիր նշաններ, ուստի, նրանց գրաֆիկները համաչափ են Ox առանցքի նկատմամբ: Նրանցից առաջինը դասավորված է Ox առանցքից վերև, երկրորդը՝ Ox առանցքից ներքև (բացառությամբ $O(0; 0)$ կետից): Նկ. 62-ում պատկերված են $y = x^2$; $y = -x^2$ ֆունկցիաների գրաֆիկները:

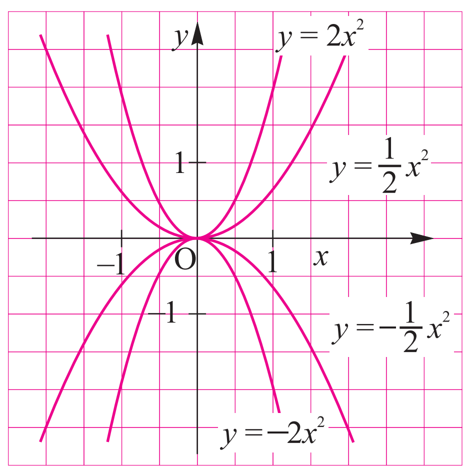


Նկ. 62

Ճիշտ նույն ձևով՝ $y = ax^2$ և $y = -ax^2$ ֆունկցիաների գրաֆիկները, որտեղ a-ն տրված, զրոյից տարբեր թիվ է, համաչափ են Ox առանցքի նկատմամբ: $a > 0$ դեպքում նրանցից առաջինը դասավորված է Ox առանցքից վերև, երկրորդը՝ Ox առանցքից ներքև (բացառությամբ $O(0; 0)$ կետի): *$a < 0$ դեպքում $y = ax^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, ինչպես և $a > 0$ դեպքում էր, պարաբոլ է:*

Նկ. 63-ում միևնույն xOy դեկարտյան կոորդինատային համակարգում պատկերված են $y = 2x^2$, $y = -2x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = -\frac{1}{2}x^2$ պարաբոլները:

a-ի ցանկացած տրված արժեքի դեպքում ($a \neq 0$) $y = ax^2$ ֆունկցիան զույգ է, որովհետև ցանկացած x-ի համար տեղի ունի $a(-x)^2 = ax^2$ հավասարությունը: Դա ցույց է տալիս, որ Oy առանցքը $y = ax^2 (a \neq 0)$ պարաբոլի համաչափության առանցքն է. *$y = ax^2$ պարաբոլի և իր համաչափության առանցքի հատման կետն անվանում են պարաբոլի գագաթ*, իսկ *պարաբոլի համաչափության առանցքը՝ պարաբոլի առանցք*:



Նկ. 63

$y = ax^2 (a \neq 0)$ ֆունկցիան $a > 0$ դեպքում $x = 0$ կետում ընդունում է իր փոքրագույն արժեքը, իսկ $a < 0$ դեպքում՝ մեծագույն արժեքը:

40.° ա) Ինչպե՞ս են անվանում $y = ax^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ ($a \neq 0$):
բ) Որ ուղիղն է $y = ax^2$ պարաբոլի առանցքը: Ինչո՞ւ:
գ) Ո՞րն են անվանում $y = ax^2(a \neq 0)$ պարաբոլի գագաթ, առանցք:

41. Գրեք $y = ax^2$ ($a \neq 0$) պարաբոլին Ox առանցքի նկատմամբ համաչափ պարաբոլի հավասարումը:

42. ա) Ո՞րն է $y = ax^2(a \neq 0)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը:
բ) Որտե՞ղ է դասավորված $y = ax^2(a \neq 0)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:
գ) Ապացուցեք, որ $y = ax^2$ ($a \neq 0$) ֆունկցիան զույգ է: Նշեք ֆունկցիայի գրաֆիկի համաչափության առանցքը:
դ) Գոյություն ունե՞ն արդյոք կետեր, որոնք պատկանում են $y = ax^2(a \neq 0)$ տեսքի բոլոր պարաբոլներին:
ե) Ընդունո՞ւմ է արդյոք $y = ax^2$ ($a \neq 0$) ֆունկցիան իր ամենամեծ և ամենափոքր արժեքները:
զ) Ո՞ր քառորդներում է դասավորված ֆունկցիայի գրաֆիկը.
1) $y = 10x^2$; 2) $y = -5x^2$; 3) $y = -0,5x^2$; 4) $y = 0,5x^2$:

43. Ո՞ր բազմության վրա է ֆունկցիան աճող.
ա) $y = 10x^2$; բ) $y = -5x^2$; գ) $y = -0,5x^2$; դ) $y = 0,5x^2$:

44. ա) Հաշվեք $y = -2x^2$ ֆունկցիայի արժեքները՝ x-ին տալով 0-ից 2 արժեքներ 0,2 քայլով: Լուծումը ձևավորեք աղյուսակի տեսքով:
բ) Հաշվեք $y = -0,5x^2$ ֆունկցիայի արժեքները՝ x-ին տալով -2-ից 2 արժեքներ 0,5 քայլով: Լուծումը ձևավորեք աղյուսակի տեսքով:

45. Կոորդինատային առանցքների վրա ընտրելով հարմար միավոր հատվածներ՝ կառուցեք ֆունկցիայի գրաֆիկը.
ա) $y = -3x^2$; բ) $y = -0,5x^2$;
գ) $y = -0,1x^2$; դ) $y = -2\frac{1}{2}x^2$;
ե) $y = -200x^2$; զ) $y = -400x^2$;
է) $y = -1000x^2$; ը) $y = -4200x^2$:

46. Տրված է $y = -x^2$ ֆունկցիան: Կառուցեք այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը: Գրաֆիկի օգնությամբ որոշեք՝ ո՞ր x-երի համար է.
ա) $y > 0$; բ) $y \leqslant 0$;
գ) $y < -1$; դ) $y \leqslant -4$:

47. Տրված է $y = -0,1x^2$ ֆունկցիան: Կառուցեք այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը: Գրաֆիկի օգնությամբ որոշեք՝ ի՞նչ արժեքներ է ընդունում ֆունկցիան, եթե.
ա) $x > 0$; բ) $x \geqslant 0$; գ) $x \geqslant -2$; դ) $x \leqslant -2$:

48. Ի՞նչ բանաձևով է տրված ֆունկցիան, եթե նրա գրաֆիկը Ox առանցքի նկատմամբ համաչափ է նշված ֆունկցիայի գրաֆիկին.
ա) $y = 3x^2$; բ) $y = -\frac{1}{3}x^2$; գ) $y = 100x^2$; դ) $y = -0,2x^2$:

49. Պատկանո՞ւմ են արդյոք.
ա) A(3; 90), B(–4; –160), C(0,2; 0,4) կետերը $y = -10x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկին,
բ) A(–2; 0,4), B(–5; –8,5), C(4; –1;6) կետերը $y = -0.1x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկին:

50. ա) Տրված է $y = -3x^2$ ֆունկցիան: $(t; -3)$ կետը պատկանում է այդ ֆունկցիայի գրաֆիկին: Գտեք t-ն:
բ) Տրված է $y = -0,2x^2$ ֆունկցիան: $(-0,2; t)$ կետը պատկանում է այդ ֆունկցիայի գրաֆիկին: Գտեք t-ն:

1.5 $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ ֆունկցիան

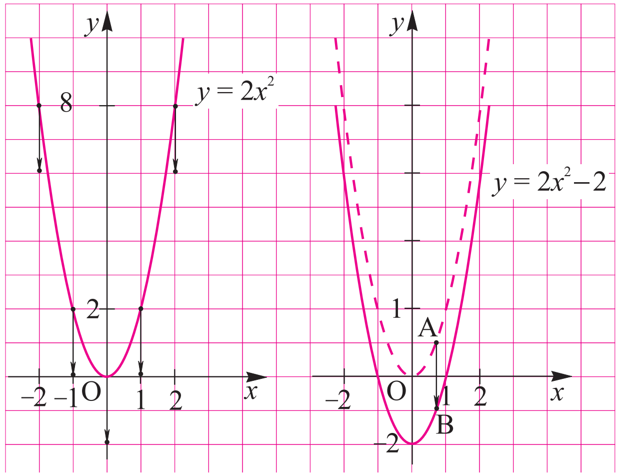
$y = a(x - x_0)^2 + y_0$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթը բոլոր իրական թվերի R բազմությունն է: Ցույց տանք՝ ինչպես կարելի է կառուցել նրա գրաֆիկը, օրինակ, $y_0 = -2$ դեպքում:

Դիցուք, տրված է $y = ax^2 (a \neq 0)$ պարաբոլը (նկ. 64. ա): $y = ax^2 - 2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար պետք է $y = ax^2$ պարաբոլը երկու միավորով տեղաշարժել ներքև: $y = ax^2 - 2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը (0; –2) գագաթով պարաբոլ է, որի առանցքը $x = 0$ ուղիղն է (նկ. 64. բ):

Իրոք, եթե A-ն $y = ax^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկի ցանկացած կետ է, իսկ B-ն՝ նույն աբսցիսն ունեցող $y = ax^2 - 2$ ֆունկցիայի գրաֆիկի կետ, ապա B-ի օրդինատը 2 միավորով փոքր է A-ի օրդինատից:

Օրինակ՝ $x = 0$ դեպքում $y = 2x^2$ ֆունկցիան ընդունում է 0 արժեք, իսկ $y = 2x^2 - 2$ ֆունկցիան՝ –2 արժեք: $x = 1$ և $x = -1$ դեպքում $y = 2x^2$ ֆունկցիան ընդունում է 2 արժեք, իսկ $y = 2x^2 - 2$ ֆունկցիան՝ 0 արժեք, և այլն:

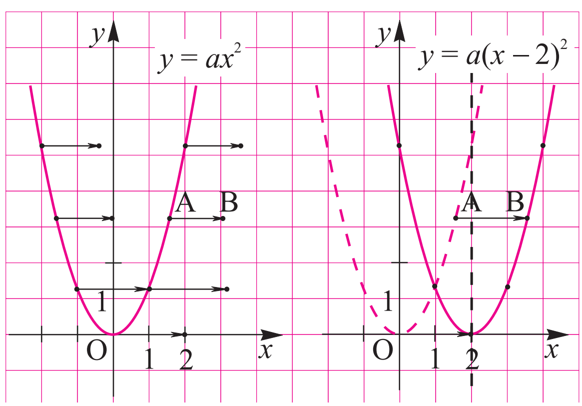
Ընդհանրապես, *$y = ax^2 + y$ պարաբոլը կառուցելու համար անհրաժեշտ է $y = ax^2$ պարաբոլը $|y_0|$ միավորով տեղաշարժել վերև, եթե $y_0 > 0$, և ներքև, եթե $y_0 < 0$:*



ա) բ)

Նկ. 64

Դիցուք, տրված է $y = ax^2 (a \neq 0)$ պարաբոլը (նկ. 65. ա): $y = a(x - 2)^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար անհրաժեշտ է $y = ax^2$ պարաբոլը 2 միավոր տեղափոխել աջ: $y = a(x - 2)^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը (2; 0) գագաթով պարաբոլ է, որի համաչափության առանցքը $x = 2$ ուղիղն է (նկ. 65. բ):



ա) բ)

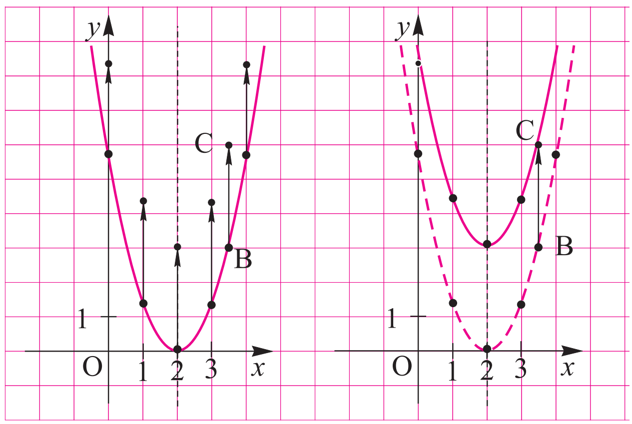
Նկ. 65

Իրոք, եթե A-ն $y = ax^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկի կամայական կետ է, իսկ B-ն՝ նույն օրդինատն ունեցող $y = a(x - 2)^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկին պատկանող կետ, ապա B կետի աբսցիսը 2 միավորով մեծ է A կետի աբսցիսից:

Օրինակ՝ $y = 2x^2$ ֆունկցիան O արժեք ընդունում է $x = 0$ կետում, իսկ $y = 2(x - 2)^2$ ֆունկցիան՝ $x = 2$ կետում, $y = 2x^2$ ֆունկցիան 2 արժեք ընդունում է

$x = 1$ և $x = -1$ դեպքում, իսկ $y = 2(x - 2)^2$ ֆունկցիան՝ $x = 3$ և $x = 1$ դեպքում, և այլն: Ընդհանրապես, *$y = a(x - x_0)^2$ պարաբոլը կառուցելու համար պետք է $y = ax^2$ պարաբոլը տեղաշարժել $|x_0|$ միավոր աջ, եթե $x_0 > 0$, և ձախ, եթե $x_0 < 0$:*

Դիցուք, այժմ տրված է $y = ax^2$ պարաբոլը (նկ. 65. ա): $y = a(x - 2)^2 + 3$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար սկզբում անհրաժեշտ է $y = ax^2$ պարաբոլը 2 միավորով տեղաշարժել աջ (նկ. 65. բ): Դրանից հետո $y = a(x - 2)^2$ պարաբոլը պետք է տեղաշարժել 3 միավոր վեր և (նկ. 66. ա): $y = a(x - 2)^2 + 3$ ֆունկցիայի գրաֆիկը (2; 3) գագաթով պարաբոլ է, որի առանցքը $x = 2$ ուղիղն է (նկ. 66. բ):



ա) բ)

Նկ. 66

Իրոք, եթե B-ն $y = a(x - 2)^2$ պարաբոլի ցանկացած կետ է, իսկ C-ն՝ նույն աբսցիսն ունեցող $y = a(x - 2)^2 + 3$ պարաբոլի կետ, ապա C-ի օրդինատը 3 միավորով մեծ է B-ի օրդինատից:

Օրինակ՝ $x = 2$ դեպքում $y = 2(x - 2)^2$ ֆունկցիան ընդունում է 0 արժեք, իսկ $y = 2(x - 2)^2 + 3$ ֆունկցիան՝ $0 + 3 = 3$ արժեք, $x = 1$ դեպքում $y = 2(x - 2)^2$ ֆունկցիան ընդունում է 2 արժեք, իսկ $y = 2(x - 2)^2 + 3$ ֆունկցիան՝ $2 + 3 = 5$ արժեք, և այլն:

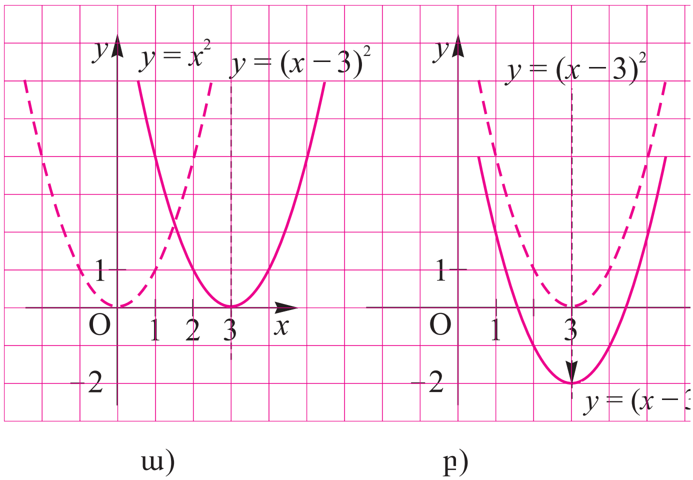
Ընդհանրապես, *$y = a(x - x_0)^2 + y_0$ պարաբոլը կառուցելու համար անհրաժեշտ է $y = ax^2$ պարաբոլը $|x_0|$ միավորով տեղաշարժել աջ, եթե $x_0 > 0$, և ձախ,՝ եթե $x_0 < 0$, այնուհետև ստացված պարաբոլը $|y_0|$ միավորով տեղաշարժել վերև, եթե $y_0 > 0$, և ներքև, եթե $y_0 < 0$:*

$y = a(x - x_0)^2 + y_0$ պարաբոլի գագաթն ունի $(x_0; y_0)$ կոորդինատները, իսկ $x = x_0$ ուղիղը նրա առանցքն է:

$y = a(x - x_0)^2 + y_0$ $(a \neq 0)$ ֆունկցիան $x = x_0$ դեպքում ընդունում է իր փոքրագույն արժեքը, եթե $a > 0$, և մեծագույն արժեքը, եթե $a < 0$:

Օրինակ՝ կառուցենք $y = (x - 3)^2 - 2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Դրա համար նախ՝ $y = x^2$ պարաբոլը 3 միավորով պետք է տեղաշարժել աջ (նկ. 67. ա): Այնուհետև՝ $y = (x - 3)^2$ պարաբոլը տեղաշարժել 2 միավոր ներքև (նկ. 67. բ):



Նկ. 67

51. $y = ax^2 (a \neq 0)$ ֆունկցիայի գրաֆիկից ինչպե՞ս ստանալ հետևյալ ֆունկցիաների գրաֆիկները.

ա) $y = a(x - x_0)^2$; բ) $y = a(x - x_0)^2 + y_0$;

գ) $y = ax^2 + y_0$:

52. Դիցուք՝ $a > 0$: Ինչպիսի՞ն պետք է լինի y_0 թիվը, որ $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ պարաբոլը

ա) Ox առանցքը հատի երկու կետերում,

բ) Ox առանցքը հատի մի կետում,

գ) Ox առանցքի հետ չհատվի:

53. x-ի ի՞նչ արժեքի դեպքում է ֆունկցիայի արժեքը 0.

ա) $y = (x - 5)^2$; բ) $y = -(x + 8)^2$;

գ) $y = 2(x - 3)^2$:

54. Ի՞նչ կոորդինատներ ունի պարաբոլի գագաթը.

ա) $y = (x + 1)^2$; բ) $y = 3(x + 9)^2$;

գ) $y = -2(x - 5)^2$; դ) $y = -4(x - 9)^2$:

55. Գրեք պարաբոլի համաչափության առանցքի հավասարումը

ա) $y = (x - 12)^2$; բ) $y = -(x + 7)^2$;

գ) $y = 3(x + 2)^2$; դ) $y = -8(x - 10)^2$:

56. Բացատրեք՝ ինչպես կարելի է $y = x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկի օգնությամբ ստանալ հետևյալ ֆունկցիաների գրաֆիկները.

ա) $y = (x + 5)^2$; բ) $y = -(x + 5)^2$;

գ) $y = 3(x - 1)^2$; դ) $y = -2(x - 1)^2$:

57. Տրված է $y = (x - 2)^2$ պարաբոլը.

ա) Որոշեք պարաբոլի գագաթի կոորդինատները:

բ) Գրեք պարաբոլի համաչափության առանցքի հավասարումը:

գ) Նշեք ֆունկցիայի որոշման տիրույթը:

դ) Նշեք՝ ինչ արժեքներ կարող է ընդունել y ֆունկցիան:

ե) Կառուցեք ֆունկցիայի գրաֆիկը:

զ) Ինչպե՞ս կփոփոխվի y-ը, եթե x արգումենտը փոփոխվի $-\infty$-ից՝ 2, 2-ից՝ $+\infty$:

է) x-ի ի՞նչ արժեքի դեպքում է ֆունկցիան ընդունում փոքրագույն արժեք: Ընդունո՞ւմ է արդյոք ֆունկցիան մեծագույն արժեք:

ը) Ո՞ր կետերում է ֆունկցիայի գրաֆիկը հատում Ox և Oy առանցքները:

58. Կառուցեք ֆունկցիայի գրաֆիկը.

ա) $y = (x - 1)^2$; բ) $y = (x + 1)^2$;

գ) $y = (x - 3)^2$; դ) $y = (x + 4)^2$;

ե) $y = -(x - 1)^2$; զ) $y = -(x + 2)^2$;

է) $y = -(x - 0{,}5)^2$; ը) $y = -(x + 0{,}5)^2$;

թ) $y = 2(x - 1)^2$; ժ) $y = -3(x + 1)^2$;

ի) $y = 0{,}5(x + 2)^2$; լ) $y = -0{,}1(x - 3)^2$;

խ) $y = -0{,}5(x - 2)^2$; ծ) $y = 0{,}1(x + 3)^2$:

59. Տրված է $y = 2(x - 3)^2$ ֆունկցիան.

ա) Կառուցեք ֆունկցիայի գրաֆիկը:

բ) Նշեք ֆունկցիայի որոշման տիրույթը:

գ) x-ի ի՞նչ արժեքի դեպքում է ֆունկցիան ընդունում փոքրագույն արժեք: Ընդունո՞ւմ է արդյոք ֆունկցիան մեծագույն արժեք x-ի որևէ արժեքի դեպքում:

դ) Ո՞ր կետերում է ֆունկցիայի գրաֆիկը հատում կոորդինատային առանցքները:

ե) Ի՞նչ արժեքներ է ընդունում ֆունկցիան, եթե $x > 3$, $x < -1$, $0 < x < 1$:

գ) x-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում են տեղի ունենում $y > 0$, $y \leqslant 0$, $y > -1$ անհավասարությունները:

60. Ի՞նչ բանաձևով է տրված ֆունկցիան, որի գրաֆիկը ստացվել է $y = x^2$ պարաբոլի գրաֆիկից.
ա) Oy առանցքով 2 անգամ սեղմելով և գագաթը (5; 0) կետը տեղափոխելով,
բ) Oy առանցքով 5 անգամ ձգելով և գագաթը (–4; 0) կետը տեղափոխելով:

61.* ա) Գրեք ֆունկցիայի տրման բանաձևը, որի գրաֆիկը համաչափ է $y = 2(x - 8)^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկին Oy առանցքի նկատմամբ:
բ) Գրեք որևէ պարաբոլի հավասարում, որի համաչափության առանցքը $x = 3$ ուղիղն է:

62. Պատկանո՞ւմ են արդյոք
ա) A(7; 45), B(–2; 170) կետերը $y = 5(x - 4)^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկն,
բ) A(7; 1), B(–8; –2) կետերը $y = -0{,}2(x - 2)^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկին:

63. ա) Տրված է $y = -5(x + 9)^2$ ֆունկցիան: (3; k) կետը պատկանում է այդ ֆունկցիայի գրաֆիկին: Գտեք k-ն:
բ) Տրված է $y = 10(x - 6)^2$ ֆունկցիան: (m; 10) կետը պատկանում է այդ ֆունկցիայի գրաֆիկին: Գտեք m-ը:
գ) (5; –8) կետը պատկանում է $y = a(x - 3)^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկին: Գտեք a-ն:

64. Տրված են $y = x^2$ և $y = x^2 + 1$ ֆունկցիաները.
ա) Ո՞րն է այդ ֆունկցիաներից յուրաքանչյուրի որոշման տիրույթը:
բ) Համեմատեք այդ ֆունկցիաների արժեքները x արգումենտի միևնույն արժեքների համար:
գ) Ինչպե՞ս կարելի է ստանալ $y = x^2 + 1$ ֆունկցիայի գրաֆիկը $y = x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկից:
դ) Նշեք տրված պարաբոլների գագաթների կոորդինատները:
ե) Արգումենտի ի՞նչ արժեքների դեպքում են ֆունկցիաների արժեքները հավասար զրոյի:
զ) y-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում են ֆունկցիաների գրաֆիկները հատում Oy առանցքը:
է) Կառուցեք տրված ֆունկցիաների գրաֆիկները:

65. Կառուցեք ֆունկցիաների գրաֆիկները՝ նախապես նշելով պարաբոլի գագաթի կոորդինատները և կոորդինատային առանցքների հետ գրաֆիկի հատման կետերի կոորդինատները (եթե դրանք գոյություն ունեն).

ա) $y = x^2 - 4$; բ) $y = x^2 + 3$;
գ) $y = -x^2 + 2$; դ) $y = -x^2 - 1$:

66. Ի՞նչ բանաձևով է տրված ֆունկցիան, եթե նրա գրաֆիկը $y = x^2$ պարաբոլից ստացվել է.

ա) գագաթը տեղափոխելով (0; 5) կետը,
բ) գագաթը տեղափոխելով (0; –3) կետը,
գ) Oy առանցքի երկայնքով 2 անգամ սեղմելով և գագաթը (0; 3) կետը տեղափոխելով,
դ) Oy առանցքով 2 անգամ ձգելով և գագաթը (0; –2) կետը տեղափոխելով:

67. Կառուցեք պարաբոլը.

ա) $y = (x - 1)^2 + 1$; բ) $y = -(x + 1)^2 + 2$;
գ) $y = -2(x - 2)^2 + 2$; դ) $y = 2(x + 1)^2 - 1$:

68. Որոշեք պարաբոլի գագաթի կոորդինատները և կառուցեք պարաբոլը.

ա) $y = (x - 2)^2 + 10$; բ) $y = (x + 8)^2 - 5$;
գ) $y = 2(x - 7)^2 - 11$; դ) $y = -2,5(x - 0,5)^2 + 1$;
ե) $y = -0,5(x - 0,5)^2 - 3$; զ) $y = 0,5(x - 4)^2 + 6$:

69. Ի՞նչ բանաձևով է տրվում ֆունկցիան, որի գրաֆիկը ստացվել է $y = 2x^2$ պարաբոլի զուգահեռ տեղափոխությամբ այնպես, որ նրա գագաթը դարձել է

ա) (5; –1) կետը, բ) (–2; 5) կետը:

70. Ընտրելով հարմար մասշտաբ՝ կառուցեք ֆունկցիայի գրաֆիկը.

ա) $y = 300(x - 0,2)^2 - 400$; բ) $y = -1000(x - 5)^2 + 2000$:

1.6 Քառակուսային ֆունկցիայի գրաֆիկը

Դիտարկենք

$$y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0) \qquad (1)$$

ֆունկցիան: Այն անվանում են քառակուսային ֆունկցիա: Քառակուսային ֆունկցիայի որոշման տիրույթը բոլոր իրական թվերի R բազմությունն է:

Թեորեմ: *Քառակուսային ֆունկցիայի գրաֆիկը $(x_0; y_0)$ գագաթով պարաբոլ է, որը ստացվում է $y = ax^2$ պարաբոլի զուգահեռ տեղափոխությունից,* որտեղ

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = -\frac{D}{4a}: \qquad (2)$$

Ապացույց: Դիտարկենք

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0 \ \ (a \neq 0) \qquad (3)$$

ֆունկցիան, որտեղ x_0-ը և y_0-ը որոշվում են (2) բանաձևերով: 8-րդ դասարանի հանրահաշվի դասընթացում ցույց է տրված (տե՛ս էջ 202, կետ 6.1), որ ցանկացած x թվի համար ճիշտ է

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2 + y_0$$

հավասարությունը: Դա նշանակում է, որ (1) և (3) ֆունկցիաներն ունեն նույն գրաֆիկները:

Սակայն, ինչպես ցույց տրվեց կետ 7.3-ում, (3) և հետևաբար՝ (1) ֆունկցիաների գրաֆիկները $(x_0; y_0)$ կետում գագաթ ունեցող պարաբոլներ են, որը ստացվում է $y = ax^2$ պարաբոլի զուգահեռ տեղափոխությունից: Թեորեմն ապացուցված է:

Օրինակ 1: Կառուցենք

$$y = x^2 - 2x - 3 \qquad (4)$$

ֆունկցիայի գրաֆիկը: Քառակուսային եռանդամից առանձնացնելով լրիվ քառակուսի՝

$$x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x + 1 - 4 = (x - 1)^2 - 4,$$

կստանանք, որ (4) բանաձևը կարելի է գրառել այսպես.

$$y = (x - 1)^2 - 4:$$

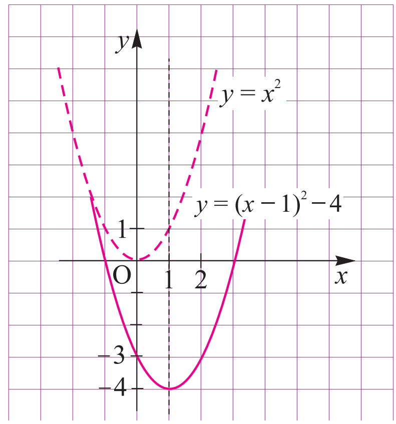
Բայց այդ դեպքում (4) ֆունկցիայի գրաֆիկը պարաբոլ է, որը ստացվում է $y = x^2$ պարաբոլի այնպիսի զուգահեռ տեղափոխությունից, որ նրա գագաթ դառնա (1; –4) կետը (նկ. 68):

Նույն գրաֆիկը կարելի էր ստանալ՝ հաշվելով պարաբոլի գագաթի և նրա մի քանի կետերի կոորդինատները.

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1,$$

$$y_0 = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4:$$

x_0	-1	0	1	2	3
y_0	0	-3	-4	-3	0



Նկ. 68

Գրաֆիկից երևում է, որ պարաբոլի գագաթը դասավորված է Ox առանցքից ներքև, և պարաբոլը Ox առանցքը հատում է երկու կետերում, այսինքն, եթե (4) հավասարության մեջ տեղադրենք $y = 0$, ապա ստացված $x^2 - 2x - 3 = 0$ քառակուսային հավասարումը պետք է ունենա երկու արմատ:

Այդ եզրակացությունը կարելի է ստուգել՝ հաշվելով քառակուսային հավասարման արմատները:

Ունենք $D = b^2 - 4ac = 16$, $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm 4}{2}$, որտեղից $x_1 = -1$; $x_2 = 3$:

Օրինակ 2: Կառուցենք

$$y = 3x^2 + 12x + 15 \tag{5}$$

պարաբոլը: Փակագծերից դուրս բերենք 3 գործակիցը, և ստացված եռանդամից առանձնացնենք լրիվ քառակուսի.

$$3(x^2 + 4x + 5) = 3(x^2 + 2 \cdot 2x + 4 + 1) = 3(x+2)^2 + 3:$$

Այսպիսով, (5) ֆունկցիան կարելի է գրառել այսպես.

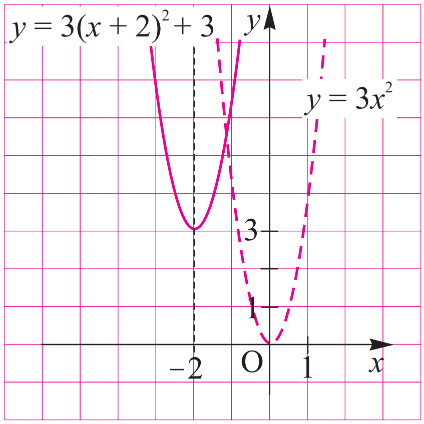
$$y = 3(x+2)^2 + 3:$$

Ուստի, (5) ֆունկցիայի գրաֆիկը պարաբոլ է, որը ստացվում է $y = 3x^2$ պարաբոլի զուգահեռ տեղափոխությունից այնպես, որ նրա գագաթը դառնա $(-2; 3)$ կետը (նկ. 69): Դա ցույց է տալիս, որ

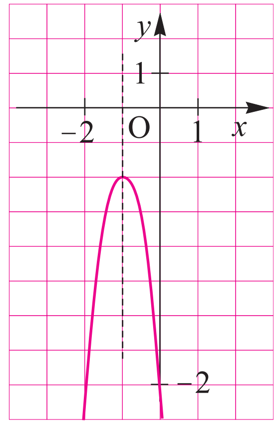
$$3x^2 + 12x + 15 = 0 \tag{6}$$

հավասարումը լուծում չունի, և հետևաբար՝ (6) քառակուսային հավասարման տարբերիչը պետք է բացասական լինի: Իրոք.

$$D = b^2 - 4ac = 144 - 180 = -36 < 0:$$



Նկ. 69



Նկ.70

Օրինակ 3: Կառուցենք

$$y = -6x^2 - 12x - 8 \qquad (7)$$

պարաբոլը: Հաշվենք պարաբոլի գագաթի կոորդինատները.

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{12}{2 \cdot (-6)} = -1,$$

$$y_0 = -6\,(-1)^2 - 12(-1) - 8 = -2:$$

Հաշվենք պարաբոլի մի քանի կետերի կոորդինատներ, որոնք համաչափ են նրա $x = -1$ առանցքի նկատմամբ

x	–3	–2	–1	0	1
y	–26	–8	–2	–8	–26

Պատկերենք ստացված կետերը xOy կոորդինատային համակարգում և միացնելով դրանք անընդհատ կորով՝ կստանանք որոնելի գրաֆիկը (նկ. 70):

Մենք տեսնում ենք, որ այս անգամ պարաբոլը չի հատում Ox առանցքը, և

$$-6x^2 - 12x - 8 = 0$$

հավասարումն արմատներ չունի, այսինքն՝ ցանկացած x իրական թվի համար տեղի է ունենում $-6x^2 - 12x - 8 < 0$ անհավասարությունը:

Այսպիսով, (1) պարաբոլը կառուցելու համար կարելի է կատարել $y = ax^2$ պարաբոլի զուգահեռ տեղափոխություն, որի դեպքում պարաբոլի գագաթը կդառնա $(x_0; 4_0)$ կետը, որի կոորդինատները որոշվում են (2) բանաձևերով:

Պարաբոլը կարելի է կառուցել նաև կետերով՝ գտնելով գագաթի և պարաբոլի մի քանի կետերի կոորդինատները, որոնք, ցանկալի է, համաչափ լինեն պարաբոլի $x = x_0$ առանցքի նկատմամբ:

(1) պարաբոլը Ox առանցքը հատում է երկու կետերում, եթե $ax^2 + bx + c$ քառակուսային եռանդամի D որոշիչը մեծ է զրոյից, շոշափում է Ox առանցքը մի կետում, եթե D = 0, չի հատում Ox առանցքը, եթե D < 0: Նրա ճյուղերը ուղղված են վերև, եթե $a > 0$, ներքև, եթե $a < 0$:

71.° ա) Ինչպե՞ս ստանալ $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը $y = ax^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկից:
բ) Ինչպե՞ս են անվանում $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:
գ) Ինչպե՞ս է դասավորված $y = ax^2 + bx + c$ ֆունկցիայի գրաֆիկը Ox առանցքի նկատմամբ $a > 0$ և $a < 0$ դեպքում, եթե.
1) D > 0; 2) D = 0; 3) D < 0:

72. Տրված է $y = ax^2 + bx + c$ քառակուսային ֆունկցիան: Նշեք.
ա) պարաբոլի գագաթի կոորդինատները,
բ) պարաբոլի համաչափության առանցքի հավասարումը,
գ) Oy առանցքի հետ պարաբոլի հատման կետի կոորդինատները,
դ) Ox առանցքի հետ հատման կետերի կոորդինատները և այն պայմանները, որոնցից կախված է այդ կետերի քանակը:

73. Նշեք պարաբոլի գագաթի կոորդինատները, համաչափության առանցքի հավասարումը, կոորդինատային առանցքների հետ պարաբոլի հատման կետերի կոորդինատները, եթե.
ա) $y = x^2 - 3x + 5$; բ) $y = x^2 + 7x - 8$; գ) $y = 2x^2 - x + 1$;
դ) $y = 5x^2 + 4x - 2$; ե) $y = -3x^2 + 5x - 10$; զ) $y = -10x^2 - x + 3$:

Կառուցեք ֆունկցիայի գրաֆիկը (74-75).

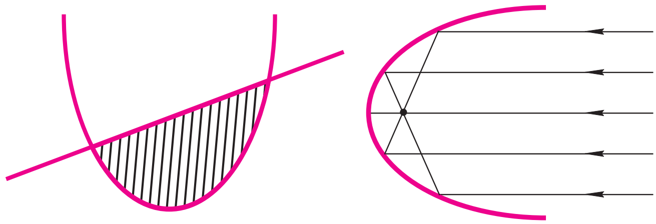
74. ա) $y = x^2 - 4x + 3$; բ) $y = x^2 + 2x - 3$; գ) $y = 4x^2 - 4x - 1$;
դ) $y = 9x^2 - 12x + 3$; ե) $y = x^2 - 6x + 5$; զ) $y = x^2 + 4x - 5$;
է) $y = -x^2 - 6x - 5$; ը) $y = -x^2 + 4x + 5$; թ) $y = x^2 - 4x + 7$:
ժ) $y = -x^2 + 4x - 6$:

75. ա) $y = x^2 + 3$; բ) $y = -x^2 + 9$;
գ) $y = 0,2x^2 - x + 0,8$; դ) $y = \frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}x + 5$;
ե) $y = -1,2x^2 - 1,2x - 0,5$; զ) $y = -8x^2 - 16x - 6$;
է) $y = 2x^2 + 8x - 10$; ը) $y = -3x^2 + 6x - 3$:

Պատմական տեղեկություններ

Պարաբոլի մասին գիտեր դեռ Արքիմեդը՝ (մ.թ.ա. 287-212թ.) Հին Հունաստանի մեծագույն մաթեմատիկոս և մեխանիկը: Նա պարաբոլը կիրառում էր նավագնացության և ռազմական գործի մի շարք պրակտիկ խնդիրներ լուծելիս:

Արքիմեդ
(մ.թ.ա. 287-212թ.)



ա) բ)

Նկ. 83

Արքիմեդին, օրինակ, հարկ եղավ հաշվել պարաբոլով և նրա որևէ լարով սահմանափակված պատկերի մակերեսը (նկ. 83. ա): Եղանակը (մեթոդը), որ նա կիրառեց այդ խնդիրը լուծելիս, հետագայում՝ երկու հազար տարի հետո, հիմք դարձավ կարևոր մաթեմատիկական գիտության՝ դիֆերենցիալ և ինտեգրալ հաշվի զարգացման համար:

Արքիմեդն իր դատողություններում կոորդինատային համակարգից չէր օգտվում: Նա գիտեր, որ պարաբոլի առանցքի վրա կա *պարաբոլի ֆոկուս* կոչվող մի հիանալի կետ, որն օժտված է այն հատկությամբ, որ եթե այնտեղ տեղադրեն լույսի աղբյուր, ապա պարաբոլի վրա ընկնող ճառագայթները (պարաբոլը կհամարենք հայելի) անդրադարձվելով կկազմեն պարաբոլի առանցքին զուգահեռ և անվերջություն գնացող ուղիղների փունջ: Իսկ եթե համարենք, որ պարաբոլի առանցքին զուգահեռ ճառագայթների փունջը (օրինակ՝ արեգակից եկող ճառագայթներ) ընկնում է պարաբոլի վրա, ապա կպարզվի, որ բոլոր անդրադարձվող ճառագայթները կհատվեն պարաբոլի ֆոկուսում (նկ. 83. բ): Գործնականում դրանից կարելի է օգտվել ֆոկուսում բարձր ջերմաստիճան ստեղծելու համար: Գոյություն ունի լեգենդ այն մասին, որ Արքիմեդը հակառակորդի նավատորմն այրեց պարաբոլատիպ հայելիների օգնությամբ:

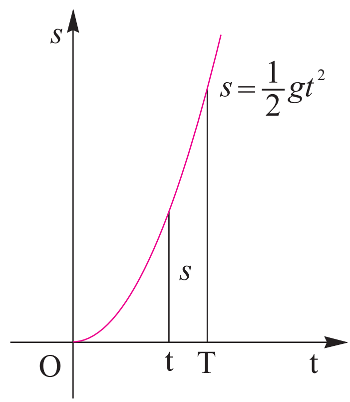
Նույն էֆեկտի վրա է հիմնված «Ինժեներ Գարինի հիպերբոլոիդ»-ի գործողության սկզբունքը Ա.Ն. Տոլստոյի համանուն վեպից: Հարկ է միայն նշել, որ իրականում այդ սարքը պետք էր անվանել պարաբոլոիդ, որովհետև միայն պարաբոլն է օժտված նշված հատկությամբ, իսկ հիպերբոլն այդպիսի հատկություն չունի:

Իտալացի գիտնական Գալիլեո Գալիլեյը (1564-1642), ուսումնասիրելով մարմինների ազատ անկումը, հանգեց այսպիսի ֆիզիկական օրենքի: Երկրի վրա ընկնող նյութական կետը (1) շարժվում է

$$s = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \ (t \geqslant 0,\ g \approx 9{,}81) \qquad (1)$$

օրենքով, որտեղ s-ը t վ-ում մարմնի անցած ճանապարհն է (մ-ով հաշված), g-ն՝ ազատ անկման արագացումը (մ/վ^2)[1]:

(1) ֆունկցիան ոչ բացասական t թվերի բազմության վրա դիտարկվող $S = at^2$ ֆունկցիայի մասնավոր դեպքն է, երբ $a = \frac{g}{2}$: Նրա սխեմատիկ գրաֆիկը պատկերված է նկ. 84-ում:



Նկ. 84

Օգտվելով (1) բանաձևից կարող ենք հաշվել տրված t ժամանակում մարմնի անցած s ճանապարհը:

Հակառակը՝ տրված $s \geqslant 0$ թվով t-ն որոշվում է

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$$

բանաձևով:

Օգտվելով գրաֆիկից՝ (տե՛ս նկ. 84) կարող ենք առանց հաշվարկներ կատարելու գտնել s-ը՝ տրված t-ի համար և t-ն՝ տրված s-ի համար:

Եթե կետը H բարձրությունից երկրի վրա ընկել է T ժամանակում, ապա՝

$$\mathrm{H} = \frac{1}{2} g\mathrm{T}^2 \ \text{ և } \ \mathrm{T} = \sqrt{\frac{2\mathrm{H}}{\mathrm{g}}}:$$

Դիտողություն: Նկ. 84-ում պատկերված գրաֆիկից օգտվելիս սխալ կլիներ մտածել, որ կետը շարժվում է գրաֆիկով: Պետք է համարել, որ կետը շարժվում է Os առանցքով, այսինքն՝ նրա հետագիծը Os առանցքն է: Գրաֆիկն օգնում է իմանալ, թե ժամանակը յուրաքանչյուր տրված t պահին Os առանցքի վրա որտեղ է գտնվում մարմինը:

Դիտարկենք երկրի ձգողական դաշտում մարմնի շարժման ևս մեկ օրինակ:

Դիցուք, երկրի մակերևույթի O կետից ուղղաձիգ վեր հրացանից կրակ է արձակվել: Գնդակը հրացանի փողից դուրս է թռել ժամանակի $t = 0$ պահին

(1) ենթադրվում է, որ կետն ընկնում է անօդ տարածության մեջ: Իրականում պետք է հաշվի առնել նաև օդի դիմադրությունը:

800 մ/վ արագությամբ: Կհամարենք, որ գնդակը շարժվում է անօդ տարածությունում, իսկ ազատ անկման արագացումը մոտավորապես 10 մ/վ է: O կետից Os կոորդինատային առանցքն ուղղենք դեպի վեր: Այդ դեպքում գնդակի շարժման օրենքն արտահայտվում է

$$s = 800t - 5t^2 \qquad (2)$$

ֆունկցիայով, որտեղ s-ը գնդակի կոորդինատն է (մ), t-ն` ժամանակը (վ):

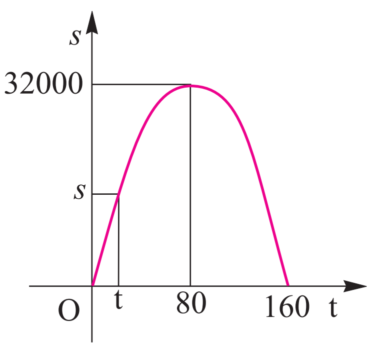
Եթե երկրի ձգողական ուժը չլիներ, ապա գնդակը հավասարաչափ վեր կշարժվեր հաղորդված արագությամբ և շարժման օրենքը կարտահայտվեր $s = 800t$ բանաձևով: Սակայն, շնորհիվ դեպի ներքև ազդող երկրի ձգողական ուժի, (2) հավասարության աջ մասում ի հայտ է գալիս երկրորդ անդամը` $\frac{gt^2}{2} \approx 5t^2$, վերցրած «մինուս» նշանով: Իրական պայմաններում պետք էր հաշվի առնել նաև օդի դիմադրությունը:

Քանի որ

$$800t - 5t^2 = -5(t^2 - 160t) = -5(t^2 - 2 \cdot 80t + 80^2) + 32000 =$$
$$= -5(t - 80)^2 + 32000,$$

ապա (2) ֆունկցիան կարելի է գրել

$$s = -5(t - 80)^2 + 32000 \text{ տեսքով:}$$



Նկ. 85

Մտցնենք tOs ուղղանկյան կոորդինատային համակարգը (նկ. 85):

Այդ նկարում գնդակի շարժման գրաֆիկը այն պարաբոլի մի մասն է, որը ստացվել է $s = -5t^2$ պարաբոլի զուգահեռ տեղափոխությունից այնպես, որ գագաթը դարձել է (80; 32000) կետը:

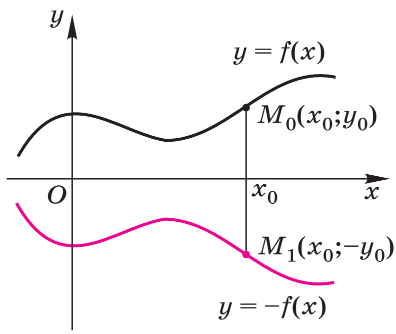
Նկ. 85-ում բերված սխեմատիկ գրաֆիկից երևում է, որ t-ն 0-ից 80 աճելիս գնդակի s հեռավորությունը երկրից մեծանում է 0-ից մինչև 32000 մ (32 կմ), այնուհետև [80; 160] ժամանակահատվածում գնդակի հեռավորությունը երկրից փոքրանում է և ժամանակի $t = 160$ պահին գնդակը նորից հասնում է երկրին:

1.7 Ֆունկցիայի գրաֆիկի ձևափոխության հիմնական մեթոդները

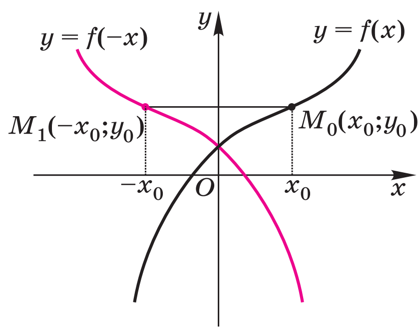
1. Համաչափություն կոորդինատային առանցքների նկատմամբ: $y = f(x)$ և $y = -f(x)$ ֆունկցիաներն ունեն միևնույն որոշման տիրույթները: Դրանց գրաֆիկները համաչափ են Ox առանցքի նկատմամբ (նկ. 106), որովհետև $(x, f(x))$ և $(x, -f(x))$ կետերը համաչափ են Ox առանցքի նկատմամբ:

Հետևաբար, $y = -f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկն ստացվում է $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկից՝ վերջինս համաչափ արտապատկերելով Ox առանցքի նկատմամբ:

$y = f(x)$ և $y = f(-x)$ ֆունկցիաներն ունեն O կետի նկատմամբ համաչափ որոշման տիրույթներ: Դրանց գրաֆիկները համաչափ են Oy առանցքի նկատմամբ (նկ. 107), հետևաբար՝ $y = f(-x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկն ստացվում է $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկից, վերջինս համաչափ արտապատկերելով Oy առանցքի նկատմամբ:



Նկ. 106



Նկ. 107

2. Տեղաշարժ կոորդինատային առանցքների երկայնքով (զուգահեռ տեղափոխություն): $y = f(x - a)$ ֆունկցիան, որտեղ $a \neq 0$, որոշված է այնպիսի x-երի համար, որ $(x - a)$-ն պատկանում է $y = f(x)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթին: $y = f(x - a)$ ֆունկցիայի գրաֆիկն ստացվում է $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը Ox առանցքի երկայնքով $|a|$ մեծությամբ տեղաշարժելու միջոցով, դեպի աջ, եթե $a > 0$, և դեպի ձախ, եթե $a < 0$:

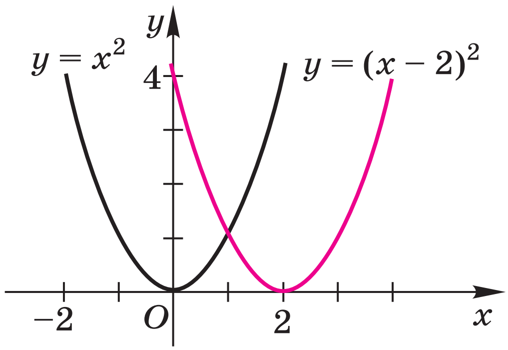
Իրոք, դիցուք՝ $M_0(x_0; y_0)$ կետը պատկանում է $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին, այսինքն՝ $y_0 = f(x_0)$: Վերցնենք $M_1(x_0 + a; y_0)$ կետը: Քանի որ $y_0 = f((x_0 + a) - a)$, ապա M_1 կետը պատկանում է $y = f(x - a)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին: Հետևաբար ֆունկցիայի գրաֆիկի ցանկացած M_1 կետ ստացվում է $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի համապատասխան M_0 կետից այդ կետը $|a|$ մեծությամբ Ox առանցքի երկայնքով տեղաշարժելու միջոցով: Ընդ որում, եթե $a > 0$, ապա տեղաշարժը կատարվում է դեպի աջ a մեծությամբ և դեպի ձախ՝ $|a|$ մեծությամբ, եթե $a < 0$:

Այդ մեթոդով կառուցենք $y = (x - 2)^2$ (նկ. 108) ֆունկցիայի գրաֆիկը:

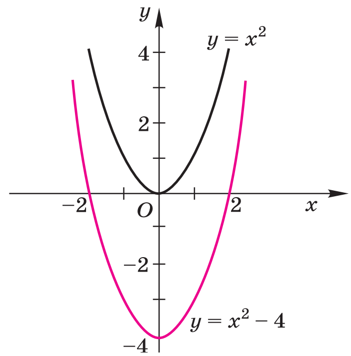
$y = f(x) + B$ $(B \neq 0)$ և $y = f(x)$ ֆունկցիաներն ունեն միևնույն որոշման տիրույթները: $y = f(x) + B$ ֆունկցիայի գրաֆիկն ստացվում է $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկն Oy առանցքի երկայնքով $|B|$ մեծությամբ տեղաշարժելու միջոցով, դեպի վերև, եթե $B > 0$, և դեպի ներքև, եթե $B < 0$:

Իրոք, դիցուք՝ $M_0\,(x_0;\, y_0)$ կետը պատկանում է $y = f\,(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին, այսինքն՝ $y_0 = f\,(x_0)$: Վերցնենք $M_1\,(x_0;\, y_0 + B)$ կետը: Քանի որ $y_0 + B = f\,(x_0) + B$, հետևաբար, որպեսզի ստանանք M_1 կետը, պետք է M_0 կետը Oy առանցքի երկայնքով տեղաշարժենք $|B|$ մեծությամբ դեպի վերև, եթե $B > 0$, և ներքև, եթե $B < 0$:

Այդ մեթոդով կառուցենք $y = x^2 - 4$ (նկ. 109) ֆունկցիայի գրաֆիկը.



Նկ. 108



Նկ. 109

3. Գրաֆիկի ձգում և սեղմում կոորդինատային առանցքների երկայնքով: $y = f\,(x)$ և $y = Bf\,(x)$ ֆունկցիաները, որտեղ $B > 0$, ունեն միևնույն որոշման տիրույթները: $y = Bf\,(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկն ստացվում է $y = f\,(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկն Oy առանցքի երկայնքով B անգամ ձգելով, եթե B > 1 և $\dfrac{1}{B}$ անգամ սեղմելով, եթե $0 < B < 1$:

Իրոք, դիցուք՝ $M_0\,(x_0;\, y_0)$ կետը պատկանում է $y = f\,(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին, այսինքն՝ $y_0 = f\,(x_0)$: Վերցնենք $M_1\,(x_0;\, By_0)$ կետը: Քանի որ $By_0 = Bf\,(x_0)$, հետևաբար, M_1 կետը պատկանում է $y = Bf\,(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին:

Դիտարկենք B թվից կախված հնարավոր դեպքերը:

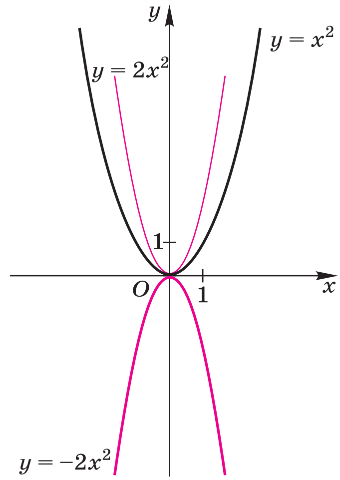
ա) $B > 1$: $M_1\,(x_0;\, By_0)$ կետը ստացվում է $M_0\,(x_0;\, y_0)$ կետից՝ $M_0\,(x_0;\, y_0)$ կետի օրդինատի մոդուլը B անգամ մեծացնելով, և $y = Bf\,(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը ստացվում է $y = f\,(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկից՝ բոլոր կետերի օրդինատների մոդուլները B անգամ մեծացնելով, այսինքն՝ Oy առանցքի երկայնքով $y = f\,(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը B անգամ ձգելով:

բ) $0 < B < 1$: $M_1\,(x_0;\, By_0)$ կետն ստացվում է $M_0\,(x_0;\, y_0)$ կետից՝ $M_0\,(x_0;\, y_0)$ կետի օրդինատի մոդուլը $\dfrac{1}{\mathrm{B}}$ անգամ փոքրացնելով, և $y = Bf\,(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկն ստացվում է $y = f\,(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկից՝ բոլոր կետերի օրդինատների մոդուլները $\dfrac{1}{\mathrm{B}}$ անգամ փոքրացնելով, այսինքն՝

Oy առանցքի երկայնքով $y=f(x)$ ֆունկ-ցիայի գրաֆիկը *B* անգամ սեղմելով:

Եթե $B<0$, ապա $B=-|B|$ և $y=Bf(x)$ ֆունկ-ցիայի գրաֆիկի կառուցումը տրոհվում է երկու քայլի. 1) $y=|B|f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի կառուցում $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի միջոցով, 2) $y=-|B|f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի կառուցում $y=|B|f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի միջոցով:

Այդ մեթոդով կառուցենք $y=-2x^2$ (նկ. 111) ֆունկցիայի գրաֆիկը:



Նկ. 111

$y=f(kx)$ ֆունկցիան, որտեղ $k>0$, որոշված է՝ բոլոր այնպիսի *x*-երի համար, որ *kx* թիվը պատկանում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթին: $y=f(kx)$ ֆունկցիայի գրաֆիկն ստացվում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկն *Oy* առանցքին *k* անգամ սեղմելով, եթե $k>1$, և $\frac{1}{k}$ անգամ ձգելով առանցքից, եթե $0<k<1$:

Իրոք, դիցուք՝ $M_0(x_0;y_0)$ կետը պատկանում է $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆի-կին, այսինքն՝ $y_0=f(x_0)$: $M_1\left(\frac{x_0}{y};y_0\right)$ կետը պատկանում է $y=f(kx)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին, քանի որ դրա կոորդինատները բավարարում են $y_0=f\left(k\frac{x_0}{k}\right)$ պայ-մանին:

Դիտարկենք հնարավոր դեպքերը՝ կախված *k* թվից:

ա) $k>1$: $M_1\left(\frac{x_0}{k};y_0\right)$ կետն ստացվում է $M_0(x_0;y_0)$ կետից՝ $M_0(x_0;y_0)$ կետի աբսցիսի մոդուլը *k* անգամ փոքրացնելով, և $y=f(kx)$ ֆունկցիայի գրաֆիկն ստացվում է՝ $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկից բոլոր կետերի աբսցիսների մոդուլները *k* անգամ փոքրացնելով, այսինքն՝ $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկն *Oy* առանցքին *k* անգամ սեղմելով:

բ) $0<k<1$: $M_1\left(\frac{x_0}{k};y_0\right)$ կետն ստացվում է $M_0(x_0;y_0)$ կետից՝ $M_0(x_0;y_0)$ կետի աբսցիսի մոդուլը *k* անգամ մեծացնելով, և $y=f(kx)$ ֆունկցիայի գրա-ֆիկն ստացվում է, $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկից բոլոր կետերի աբսցիսների մոդուլները *k* անգամ մեծացնելով, այսինքն՝ $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկն *Oy* առանցքից *k* անգամ ձգելով:

Եթե $k<0$, ապա $k=-|k|$ և $y=f(kx)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի կառուցումը տրոհվում է երկու քայլի.

1) $y=f(|k|x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի կառուցում $y=f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի միջոցով,

2) $y = f(-|k|x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի կառուցում $y = f(|k|x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի միջոցով:

4. $y = Af(k(x-a)) + B$ գրաֆիկի կառուցումը $y = f(x)$ գրաֆիկի միջոցով: $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի միջոցով $y = Af(k(x-a)) + B$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցվում է գրաֆիկի՝ վերը դիտարկված ձևափոխությունների հաջորդական կիրառման միջոցով: Օրինակ՝

$$y = f(x) \to y = f(kx) \to y = Af(kx) \to$$
$$\to y = Af(k(x-a)) \to y = Af(k(x-a)) + B:$$

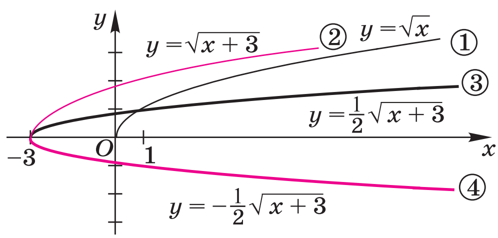
Այդ մեթոդի կիրառությունը ցուցադրենք մի քանի օրինակներով:

ՕՐԻՆԱԿ 1. Կառուցենք

$$y = -\frac{1}{2}\sqrt{x+3}$$

ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցենք քայլերի հետևյալ հաջորդականությամբ (նկ. 116).



Նկ. 116

$$y = \sqrt{x} \to y = \sqrt{x+3} \to y = \frac{1}{2}\sqrt{x+3} \to y = -\frac{1}{2}\sqrt{x+3}:$$

ՕՐԻՆԱԿ 2. $y = \dfrac{k}{x-x_0} + y_0$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար անհրաժեշտ է կառուցել $y = \dfrac{k}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, այնուհետև կառուցված գրաֆիկը նախ՝ տեղաշարժել $|x_0|$ միավոր աջ, եթե $x_0 > 0$, և ձախ, եթե $x_0 < 0$, այնուհետև՝ $|y_0|$ միավոր վերև, եթե $y_0 > 0$, և ներքև, եթե $y_0 < 0$:

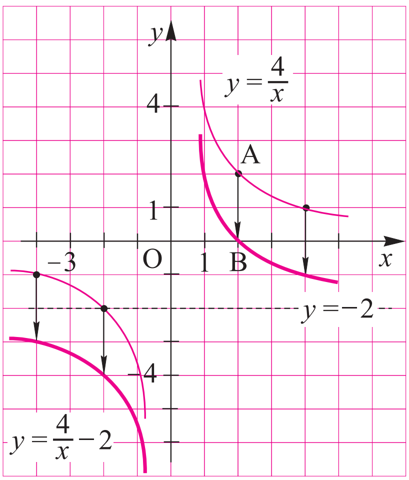
Դիտարկենք k, x_0 և y_0 թվերի ճշգրիտ արժեքները.

ա) Կառուցենք $y = \dfrac{4}{x} - 2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

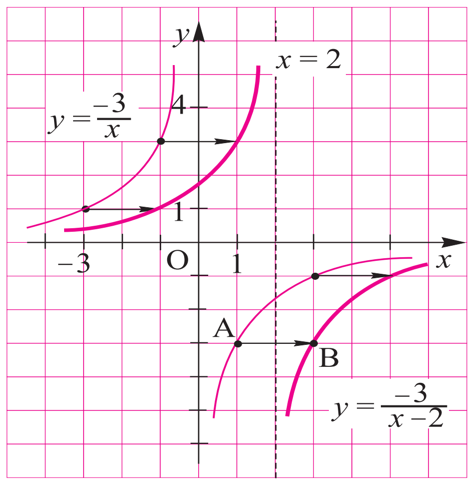
Նախ՝ կառուցենք $y = \dfrac{4}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ հաշվելով մի քանի կետերի կոորդինատներ՝

x	–4	–2	–1	1	2	4
y	–1	–2	–4	4	2	1

$y = \dfrac{4}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը հիպերբոլ է, որի ճյուղերը դասավորված են I և III քառորդներում: $y = \dfrac{4}{x} - 2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար կառուցված գրաֆիկը պետք է 2 միավորով տեղաշարժել ներքև (նկ.71):



Նկ. 71



Նկ. 72

բ) Կառուցենք $y = \dfrac{-3}{x-2}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Նախ՝ կառուցենք $y = \dfrac{-3}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ հաշվելով մի քանի կետերի կոորդինատները.

x	–3	–2	–1,5	–1	1	1,5	2	3
y	1	1,5	2	3	–3	–2	–1,5	–1

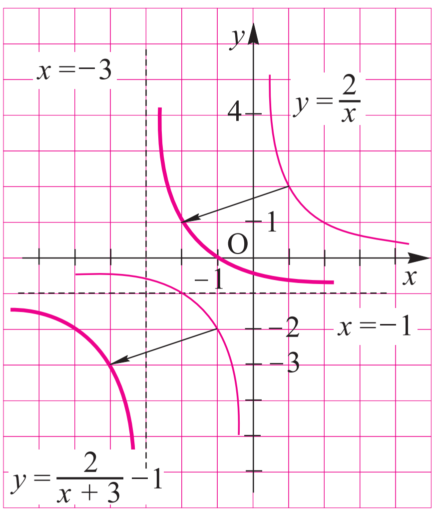
$y = \dfrac{-3}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը հիպերբոլ է, որի ճյուղերը դասավորված են II և IV քառորդներում: $y = \dfrac{-3}{x-2}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար անհրաժեշտ է կառուցված գրաֆիկը տեղաշարժել 2 միավոր աջ (նկ.72):

գ) Կառուցենք $y = \dfrac{2}{x+3} - 1$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

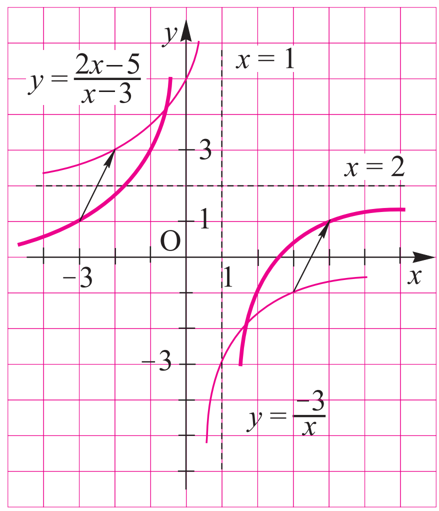
Նախ՝ կառուցենք $y = \dfrac{2}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ հաշվելով մի քանի կետերի կոորդինատները.

x	–4	–2	–1	–0,5	0,5	1	2	4
y	–0,5	–1	–2	–4	4	2	1	0,5

$y = \dfrac{2}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը հիպերբոլ է, որի ճյուղերը դասավորված են I և III քառորդներում: $y = \dfrac{2}{x+3} - 1$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար անհրաժեշտ է կառուցված գրաֆիկը տեղաշարժել 3 միավոր ձախ և 1 միավոր ներքև (նկ. 73):



Նկ. 73



Նկ. 74

դ) Կառուցենք $y = \dfrac{2x-5}{x-1}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Նախ՝ ձևափոխենք կոտորակը՝ $\dfrac{2x-5}{x-1} = \dfrac{-3}{x-1} + 2$, ուստի, տրված ֆունկցիան կարելի է գրառել $y = \dfrac{-3}{x-1} + 2$ տեսքով: Այժմ կառուցենք $y = \dfrac{-3}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ հաշվելով մի քանի կետերի կոորդինատները.

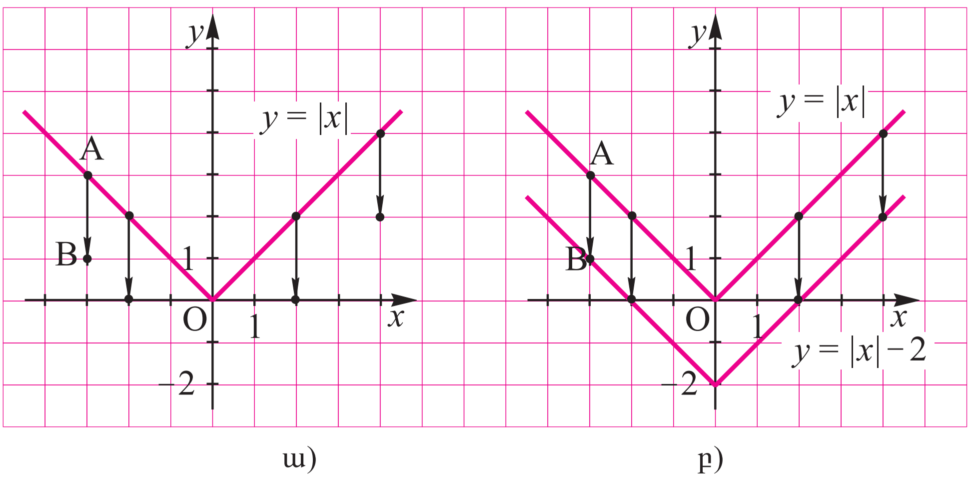
x	–3	–2	–1,5	–1	1	1,5	2	3
y	1	1,5	2	3	–3	–2	–1,5	–1

$y = \dfrac{-3}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը հիպերբոլ է, որի ճյուղերը դասավորված են II և IV քառորդներում:

$y = \dfrac{-3}{x-1} + 2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար անհրաժեշտ է կառուցված գրաֆիկը տեղաշարժել 1 միավոր աջ և 2 միավոր վերև (տե՛ս նկ. 74):

ՕՐԻՆԱԿ 3. Կառուցենք $y = |x| - 2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

xOy ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում $y = |x| - 2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար նախ՝ կառուցենք $y = |x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը (նկ. 50. ա):

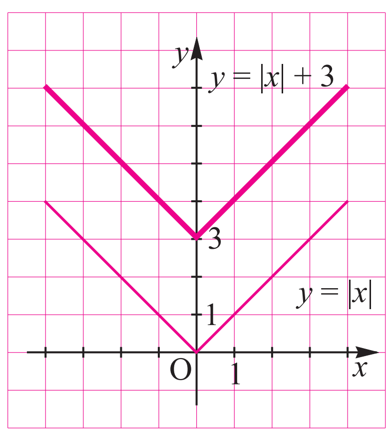


Նկ. 50

$y = |x| - 2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կարելի է ստանալ՝ $y = |x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկի բոլոր կետերը 2 միավորով ներքև տեղաշարժելով (նկ. 50 բ):

ՕՐԻՆԱԿ 4. Կառուցենք $y = |x| + 3$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

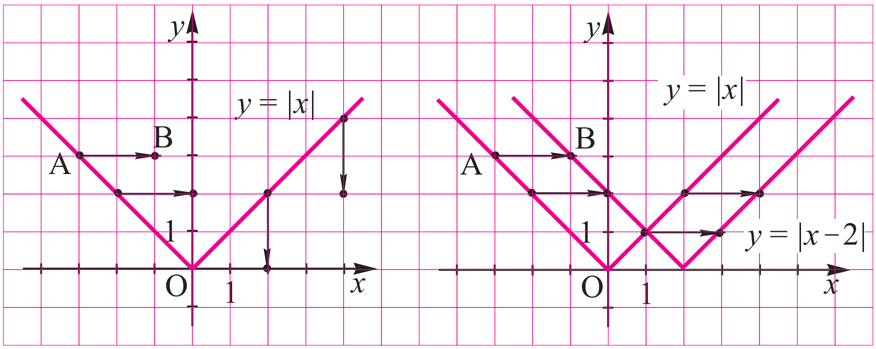
Ինչպես և նախորդ օրինակում, այս ֆունկցիայի գրաֆիկը կարելի է ստանալ՝ $y = |x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը 3 միավոր վերև տեղաշարժելով (նկ. 51):



Նկ. 51

ՕՐԻՆԱԿ 5. Կառուցենք $y = |x - 2|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

xOy ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում $y = |x - 2|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար նախ՝ կառուցենք $y = |x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը: (նկ. 52. ա):



ա) բ)

Նկ. 52

$y = |x - 2|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կարելի է ստանալ $y = |x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկից նրա բոլոր կետերը 2 միավորով աջ տեղափոխելով (նկ. 52. բ):

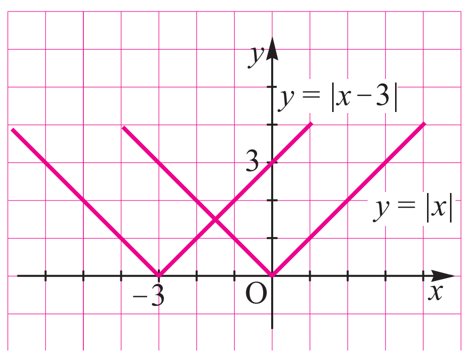
ՕՐԻՆԱԿ 6. Կառուցենք $y = |x + 3|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Դատելով օրինակ 3-ից՝ $y = |x + 3|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կարելի է ստանալ $y = |x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը 3 միավոր ձախ տեղաշարժելով (նկ. 53):

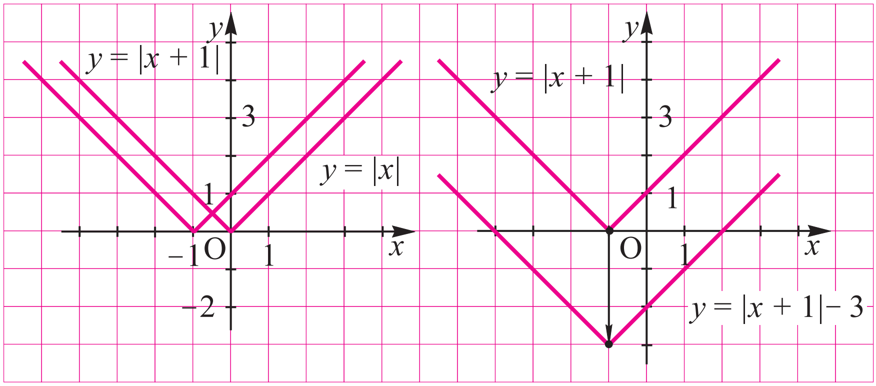
ՕՐԻՆԱԿ 7. Կառուցենք $y = |x + 1| - 3$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

1) Նախ՝ կառուցենք $y = |x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը. այն 1 միավոր ձախ տեղաշարժելով՝ կստանանք $y = |x + 1|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը (նկ. 54. ա):

2) Այնուհետև տեղաշարժելով $y = |x + 1|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը 3 միավոր ներքև՝ կստանանք $y = |x + 1| - 3$ ֆունկցիայի գրաֆիկը (նկ. 54. բ):



Նկ. 53



ա) բ)

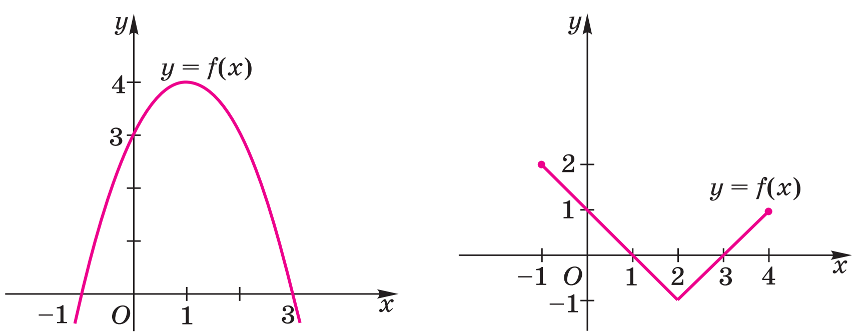
Նկ. 54

76. Տրված է $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը (նկ. 121. ա, բ): Կառուցեք ֆունկցիայի գրաֆիկը.

ա) $y = -f(x)$, բ) $y = f(-x)$, գ) $y = f(x-2)$ դ) $y = f(x+3)$,

ե) $y = f(x+1) - 2$, զ) $y = f(x-2) + 1$, է) $y = 2f(x)$,

ը) $y = \frac{1}{2}f(x)$, թ) $y = f(2x)$, ժ) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$:



ա) բ)

Նկ. 121

Կառուցեք ֆունկցիայի գրաֆիկը (77-80).

77. ա) $y = \frac{6}{x} + 2$; բ) $y = \frac{-6}{x} - 2$;

գ) $y = \dfrac{-8}{x} - 3$;

դ) $y = \dfrac{8}{x} + 3$;

ե) $y = \dfrac{4}{x-3}$;

զ) $y = \dfrac{-4}{x+4}$:

78. ա) $y = \dfrac{6}{x-2}$;

բ) $y = \dfrac{-6}{x+2}$;

գ) $y = \dfrac{2}{x+1} - 3$;

դ) $y = \dfrac{-2}{x-2} + 1$;

ե) $y = \dfrac{3}{x+2} + 2$;

զ) $y = \dfrac{-3}{x-1} - 2$:

79. ա) $y = \dfrac{-2x+4}{x+1}$;

բ) $y = \dfrac{-x+1}{x-3}$;

գ) $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$;

դ) $y = \dfrac{3x+2}{x+2}$:

80. ա) $y = \dfrac{4}{x}$;

բ) $y = \dfrac{-4}{x}$;

գ) $y = \dfrac{4}{x} + 2$;

դ) $y = \dfrac{4}{x-2}$;

ե) $y = \dfrac{4}{x+2} - 2$;

զ) $y = \dfrac{-4}{x-1}$;

է) $y = \dfrac{-4}{x+3} - 2$;

ը) $y = \dfrac{6}{x-3} + 1$;

թ) $y = \dfrac{-8}{x+1} - 3$:

81. Բացատրեք՝ ինչպես $y = |x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկի օգնությամբ կառուցել նշված ֆունկցիաների գրաֆիկները.

ա) $y = |x| - 5$;

բ) $y = |x| + 4$;

գ) $y = |x - 4|$;

դ) $y = |x + 1|$;

ե) $y = |x - 2| + 3$;

զ) $y = |x + 2| - 3$;

է) $y = |x + 3| + 2$;

ը) $y = |x - 3| - 2$;

թ) $y = |x + 4| + 1$:

1.8* Մոդուլ պարունակող ֆունկցիաների գրաֆիկներ

Դիցուք, տրված է $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը: Պահանջվում է դրա միջոցով կառուցել $y = |f(x)|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

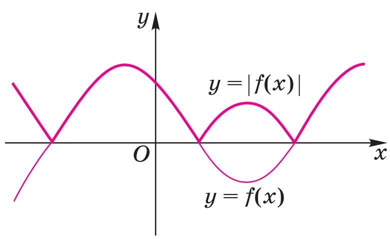
Եթե $y = f(x)$ ֆունկցիան X բազմության վրա ընդունում է ոչ բացասական արժեքներ ($f(x) \geqslant 0$), ապա X-ի վրա $y = |f(x)|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը համընկնում է $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկին:

Իսկ եթե $y = f(x)$ ֆունկցիան X_1 բազմության վրա ընդունում է բացասական արժեքներ՝ ($f(x) < 0$), ապա X_1-ի վրա $y = |f(x)|$ ֆունկցիայի գրաֆիկն ստացվում է $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկից Ox առանցքի նկատմամբ համաչափ արտապատկերելով, քանի որ X_1 բազմության բոլոր x-երի համար $|f(x)| = -f(x)$:

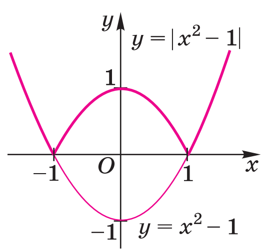
Այսպիսով, $y = |f(x)|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար պետք է պահպանել $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի այն մասը, որի կետերը գտնվում են Ox առանցքի վրա կամ դրանից վերև, և համաչափ արտապատկերել Ox առանցքի նկատմամբ $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի այն մասը, որի կետերը գտնվում են Ox առանցքից ներքև (նկ. 126):

Նկատենք, որ $y = |f(x)|$ ֆունկցիայի գրաֆիկն Ox առանցքից ներքև գտնվող կետեր չունի:

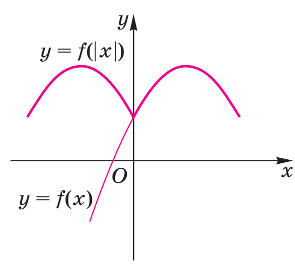
Այդ մեթոդով կառուցենք $y = |x^2 - 1|$ (նկ. 127) ֆունկցիայի գրաֆիկը:



Նկ. 126



Նկ. 127



Նկ. 129

Այժմ, դիցուք՝ տրված է X բազմության վրա որոշված $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը: Պահանջվում է դրա միջոցով կառուցել $y = f(|x|)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Նկատենք, որ եթե x կետը պատկանում է $y = f(|(x)|)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթին, ապա $-x$ կետը նույնպես պատկանում է այդ տիրույթին, որովհետև $|-x| = |x|$: $y = f(|x|)$ ֆունկցիայի որոշման տիրույթի ցանկացած x-ի համար $f(|-x|) = f(|x|)$, այսինքն՝ $y = f(|x|)$ ֆունկցիան զույգ է:

Երբ $x \geqslant 0$, $x \in X$, $y = f(|x|)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը համընկնում է $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի հետ, քանի որ այդ դեպքում $f(|x|) = f(x)$: Դա $y = f(|x|)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի աջ մասն է, իսկ ձախ մասը համաչափ է աջին Oy առանցքի նկատմամբ, որովհետև $y = f(|x|)$ ֆունկցիան զույգ է:

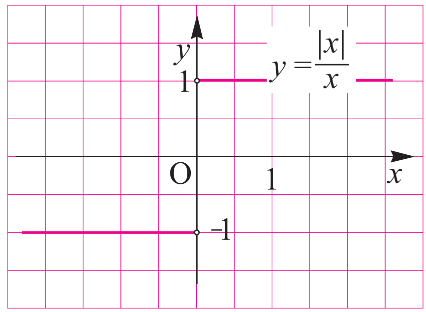
Այսպիսով, $y = f(|x|)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կառուցելու համար պետք է պահպանել $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի միայն այն մասը, որի կետերը գտնվում են Oy առանցքի վրա կամ դրանից աջ, և համաչափ արտապատկերել այդ մասը Oy առանցքի նկատմամբ (նկ. 129):

ՕՐԻՆԱԿ 1. Կառուցեք $y = \frac{|x|}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Այս ֆունկցիան որոշված է ցանկացած $x \neq 0$ թվերի համար: Երբ $x > 0$ $|x| = x$ և $\frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$: $x < 0$ դեպքում $|x| = -x$ և $\frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$, $x = 0$ կետում ֆունկցիան որոշված չէ, ուստի, 0 աբսցիսով կետ գրաֆիկի վրա գոյություն չունի:

Այսպիսով

$$y = \begin{cases} 1, \text{ եթե } x > 0, \\ -1, \text{ եթե } x < 0, \\ \text{որոշված չէ, եթե } x = 0: \end{cases}$$



Նկ. 75

$y = \frac{|x|}{x}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը պատկերված է նկ. 75-ում: Գրաֆիկին չպատկանող կետերը նշված են շրջանակներով:

ՕՐԻՆԱԿ 2. Կառուցենք

$$y = |x - 1| + |x + 1|$$

ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Մոդուլի նշանի տակ գտնվող $x - 1$ և $x + 1$ արտահայտությունները զրո են դառնում համապատասխանաբար 1 և -1 կետերում: Տրված ֆունկցիան դիտարկենք $(-\infty; -1)$, $[-1; 1]$ և $1; +\infty)$ միջակայքում: $x > 1$ դեպքում ունենք

$$|x - 1| + |x + 1| = x - 1 + x + 1 = 2x:$$

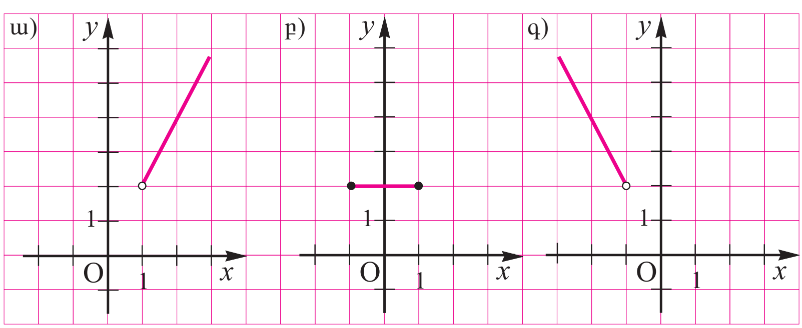
$y = 2x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը $x > 1$ դեպքում պատկերված է 76. ա նկարում $-1 \leqslant x \leqslant 1$ դեպքում ունենք

$$|x - 1| + |x + 1| = -x + 1 + x + 1 = 2:$$

$y = 2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը $-2 \leqslant x \leqslant 2$ դեպքում պատկերված է 76. բ նկարում:

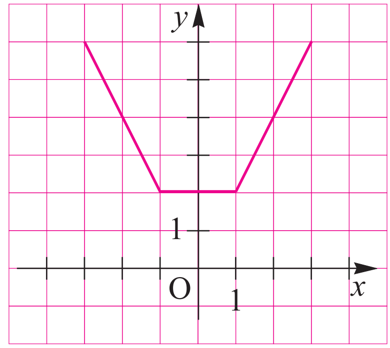
$x < -1$ դեպքում ունենք $|x - 1| + |x + 1| = -x + 1 - x - 1 = -2x$:

$y = -2x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը $x < -1$ դեպքում պատկերված է 76. գ նկարում:



Նկ. 76

$y = |x - 1| + |x + 1|$ ֆունկցիայի գրաֆիկն ամբողջ Ox թվային առանցքի վրա պատկերված է նկ. 77-ում:



Նկ. 77-ը:

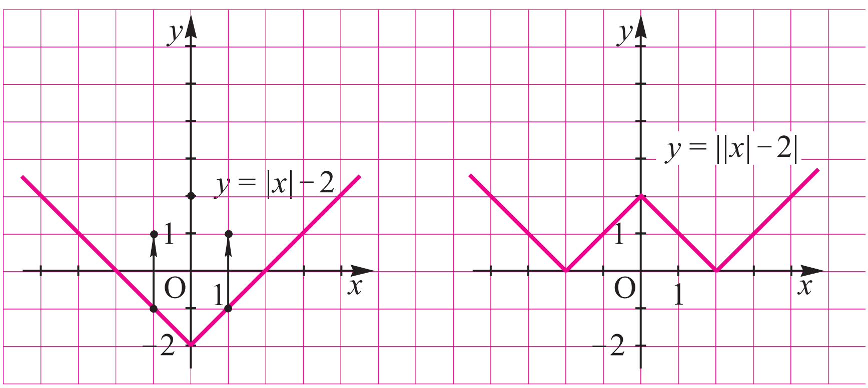
ՕՐԻՆԱԿ 3. Կառուցենք $y = ||x| - 2|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Նախ կառուցենք $y = |x| - 2$ ֆունկցիայի գրաֆիկը (նկ. 78. ա):

$x \geqslant 2$ և $x \leqslant -2$ դեպքում $|x| - 2 \geqslant 0$, հետևաբար՝ $||x| - 2| = |x| - 2$: Դա նշանակում է, որ $x \geqslant 2$ և $x \leqslant -2$ դեպքում $y = ||x| - 2|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը համընկնում է $y = |x| - 2$ ֆունկցիայի գրաֆիկին:

$-2 < x < 2$ դեպքում $|x| - 2$ արտահայտության արժեքները բացասական են, ուստի՝ $||x| - 2| = -(|x| - 2)$: Դրա համար էլ 78. ա նկարում պատկերված գրաֆիկի Ox առանցքից ներքև գտնվող մասը պետք է համաչափ արտապատկերել Ox առանցքի նկատմամբ (այլ կերպ ասած՝ գրաֆիկի այդ մասը պետք է «ծալել» Ox առանցքով դեպի վեր):

$y = ||x| - 2|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը պատկերված է 78. բ նկարում:



ա) բ)

Նկ. 78

ՕՐԻՆԱԿ 4. Կառուցենք $y = x^2 - 2|x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

Նկատենք, որ x արգումենտի նշանը հակադիրով փոխարինելիս ֆունկցիայի արժեքը չի փոխվում, քանի որ

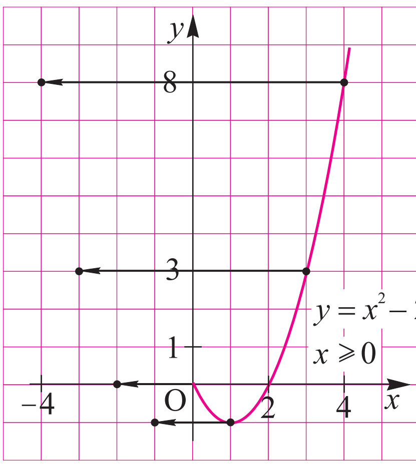
$$(-x)^2 - 2 \cdot |-x| = x^2 - 2\,|x|:$$

Դա նշանակում է, որ $y = x^2 - 2|x|$ ֆունկցիան զույգ է, նրա գրաֆիկը համաչափ է Oy առանցքի նկատմամբ:

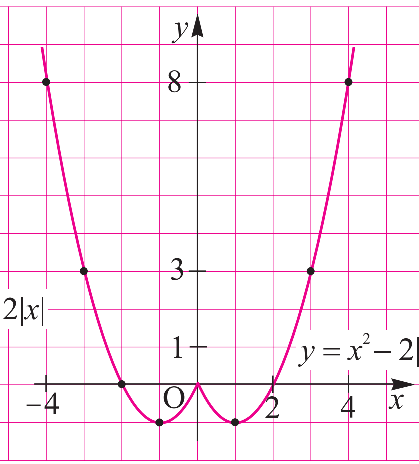
Նախ՝ կառուցենք $y = 2x - 2|x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, երբ $x \geqslant 0$: Այդ դեպքում $y = x^2 - 2|x|$ ֆունկցիան կարելի է գրառել $y = x^2 - 2x$ տեսքով: $y = x^2 - 2x$ պարաբոլի գագաթն ունի $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{2}{2} = 1$ աբսցիսը, պարաբոլի ճյուղերն ուղղված են վերև, քանի որ $a = 1 > 0$: Որոշենք նաև գրաֆիկի մի քանի կետերի կոորդինատները:

x	0	1	2	3	4
y	0	–1	0	3	8

$y = x^2 - 2|x|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, որտեղ $x \geqslant 0$, որը պատկերված է 80. ա նկարում: Այժմ ստացված գրաֆիկն արտապատկերենք Oy առանցքի նկատմամբ համաչափ և կստանանք որոնելի գրաֆիկը (նկ. 80. բ):



ա)



բ)

Նկ. 80

Կառուցեք ֆունկցիայի գրաֆիկը (82-85).

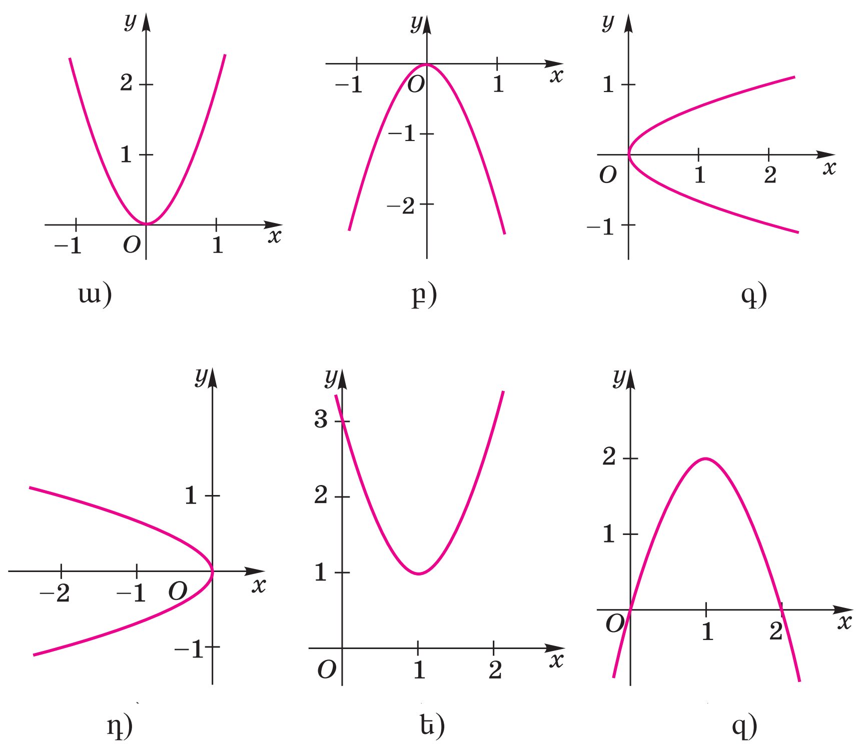
82. ա) $y = |x| + x$; բ) $y = |x| - x$;
գ) $y = x \cdot |x|$; դ) $y = |x - 2| + |x + 2|$;
ե) $y = ||x| - 3|$; զ) $y = |||x| - 2| - 1|$;
է) $y = x^2 - 6|x|$; ը) $y = x^2 - 4|x|$;
թ) $y = x^2 - 2|x| - 1$; ժ) $y = x^2 + 2|x| - 1$;
ի) $y = |x^2 - 4x + 3|$; լ) $y = |x^2 - 2|x||$;
խ) $y = |x^2 - 4|x||$; ծ) $y = |x^2 - 2|x| - 1|$;
կ) $y = |x^2 + 2|x| - 1|$:

83. ա) $y = x^2$, բ) $y = x^2 - 4$, գ) $y = (x - 1)^2$,
դ) $y = (x - 3)^2 + 2$, ե) $y = x^2 - 6x + 8$, զ) $y = |x^2 - 6x + 8|$։

84. ա) $y = \dfrac{1}{x}$, բ) $y = \dfrac{4}{x} + 2$, գ) $y = \dfrac{6}{x-2}$,
դ) $y = \dfrac{6}{x+1} - 1$, ե) $y = \dfrac{4x+2}{x+1}$, զ) $y = \dfrac{1}{|x|}$։

85.* ա) $y = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$, բ) $y = \dfrac{|x-1|}{x-1}$, գ) $y = x^2 - 6|x| + 8$,
դ) $y = |x^2 - 6|x| + 8|$, ե) $y = ||x| - 2|$, զ) $y = \dfrac{|x-1|}{|x+1|}$։

86. Նկար 125-ում ա-զ պատկերված է պարաբոլ։ Այդ պարաբոլն արդյո՞ք $y = f(x)$ կամ $x = \varphi(y)$ ֆունկցիայի գրաֆիկ է։ Եթե այո, ապա գրեք այդ ֆունկցիան բանաձևով։



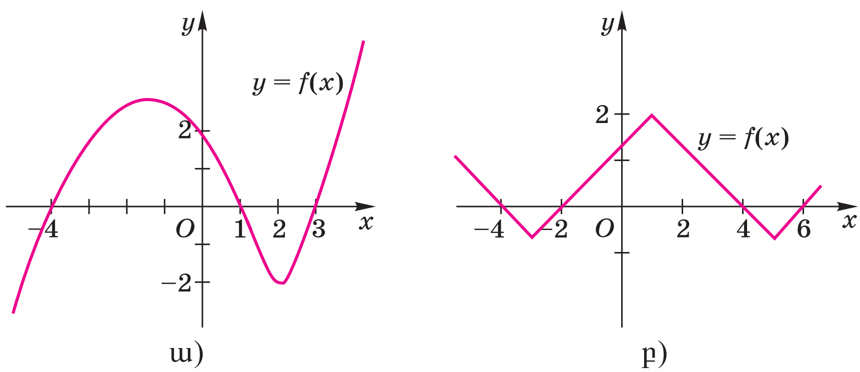
Նկ. 125

87. Ինչպե՞ս կառուցել $y = |f(x)|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, եթե տրված է $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

88. Տրված է $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը (նկ. 138. ա, բ): Կառուցեք $y = |f(x)|$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

89. Ինչպե՞ս կառուցել $y = f(|x|)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, եթե տրված է $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

90. Տրված է $y = f(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը (նկ. 138. ա, բ): Կառուցեք $y = f(|x|)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:



Նկ. 138

Կառուցեք ֆունկցիայի գրաֆիկը (91-93).

91. ա) $y = |x^2 - 4|$, բ) $y = \left|\dfrac{4}{x} - 1\right|$:

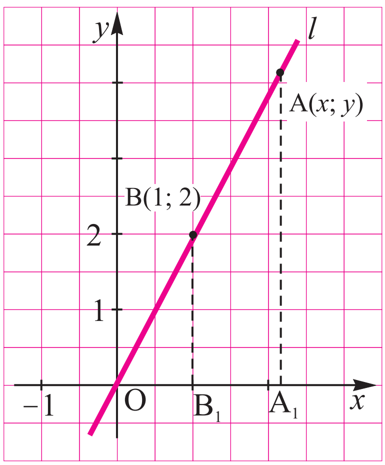
92. ա) $y = 1 - \dfrac{1}{|x|}$, բ) $y = \dfrac{1}{|x|} + 2$:

93. ա) $y = x^2 - 5\,|x - 1| + 1$, բ) $y = |x^2 - 3x + 2| + 2x - 3$,
գ) $y = (x + 1)(|x| - 2)$, դ) $y = |x^2 + 3x - 2| - |5x - 2|$,
ե)* $y = \dfrac{2x - 6}{|3 - x|}$, զ)* $y = \dfrac{2|x| + 1}{2 - x}$,

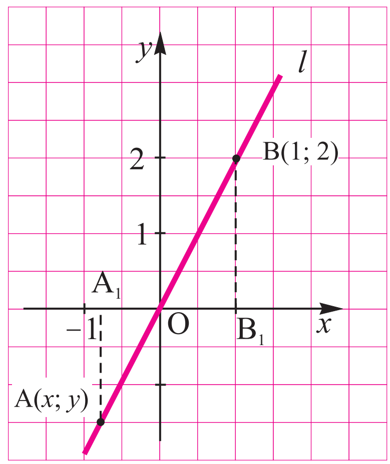
1.9* Ուղղի հավասարումը, շրջանագծի հավասարումը

7-րդ դասարանի հանրահաշվի դասընթացում նշել ենք, որ, օրինակ, $y = 2x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կոորդինատների սկզբնակետով և B(1; 2) կետով անցնող l ուղիղ գիծ է: Այստեղ կհիմնավորենք այդ պնդումը:

1) Նկ. 81-ում նշված է l ուղղին պատկանող A(x; y) կետը, որի x աբսցիսը դրական է:



Նկ. 81



Նկ. 82

A և B կետերով տանենք Oy առանցքին զուգահեռ ուղիղներ, դրանք Ox առանցքը կհատեն A_1 և B_1 կետերում: Ունենք $OB_1 = 1$, $BB_1 = 2$, $OA_1 = x$, $AA_1 = y$:

OBB_1 և OAA_1 ուղղանկյուն եռանկյունները նման են, որովհետև ունեն BOB_1 ընդհանուր անկյուն, ուստի, դրանց համապատասխան էջերը համեմատական են.

$$\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{OA_1}{OB_1} \text{ կամ } \frac{y}{2} = \frac{x}{1},$$

որտեղից և $y = 2x$: Հետևաբար, A կետը $y = 2x$ ֆունկցիայի գրաֆիկի կետն է:

2) Նկ. 82-ում l ուղղի վրա նշված է A(x; y) կետը, որտեղ $x < 0$:

Բայց այդ դեպքում նաև $y < 0$ և հետևաբար՝

$$OB_1 = 1,\ BB_1 = 2,\ OA_1 = -x,\ AA_1 = -y:$$

OBB_1 և OAA_1 ուղղանկյուն եռանկյունների BOB_1 և AOA_1 անկյունները իրար հավասար են (որպես հակադիր անկյուններ): Ուստի, այդ եռանկյունները նման են, և դրանց համապատասխան էջերը՝ համեմատական, այսինքն՝

$$\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{OA_1}{OB_1} \text{ կամ } \frac{-y}{2} = \frac{-x}{1},$$

որտեղ և $y = 2x$:

Հետևաբար, A-ն $y = 2x$ ֆունկցիայի գրաֆիկի կետ է:

3) Եթե $A(x, y)$ կետի աբսցիսը` $x = 0$, ապա A-ն կոորդինատների սկզբնակետն է և նրա օրդինատը` $y = 0$: Բայց այդ դեպքում $y = 2x$, որովհետև $0 = 2 \cdot 0$:

Այսպիսով, ցույց տրվեց, որ եթե $A(x, y)$ կետը գտնվում է l ուղղի վրա, ապա դրա y օրդինատը հավասար է $2x$:

Ճիշտ է և հակառակը. ցանկացած տրված x-ի համար $A(x; 2x)$ կետը գտնվում է l ուղղի վրա: Դա ակնհայտ է, որովհետև l ուղղի վրա կա տրված x աբսցիսն ունեցող միայն մեկ $A(x; y)$ կետ:

Ինչպես վերը ցույց տրվեց, այդ կետի համար $y = 2x$:

Նման կերպ կարելի է ցույց տալ, որ $y = kx$ ֆունկցիայի գրաֆիկը կոորդինատների սկզբնակետով և $B(1; k)$ կետով անցնող ուղիղ գիծ է:

Այժմ ապացուցենք, որ

$$ax + by + c = 0 \qquad (1)$$

հավասարումով, որտեղ a-ն և b-ն միաժամանակ հավասար չեն զրոյի ($a^2 + b^2 \neq 0$), xOy կոորդինատային համակարգում տրվում է որոշակի ուղիղ գիծ:

Իրոք, եթե $b \neq 0$, ապա (1) հավասարումը կարելի է գրել

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \qquad (2)$$

տեսքով:

Իսկ մենք գիտենք (7-րդ դասարանի հանրահաշվի դասընթացից), որ (2) հավասարումով տրվող ֆունկցիայի գրաֆիկն ուղիղ գիծ է (այստեղ անկյունային գործակիցը $-\frac{a}{b}$-ն է, ազատ անդամը` $-\frac{c}{b}$):

Եթե $b = 0$, ապա (1) հավասարումը կարելի է գրել

$$ax + c = 0 \qquad (3)$$

տեսքով:

Քանի որ $a^2 + b^2 \neq 0$, ապա $b = 0$ պայմանից հետևում է, որ $a \neq 0$: Այդ դեպքում (3) հավասարումը կարելի է գրել $x = -\frac{c}{a}$ տեսքով:

Ինչպես գիտենք, այդ հավասարումով տրվում է Oy առանցքին զուգահեռ ուղիղ, որը Ox առանցքը հատում է $-\frac{c}{a}$ կետում: Այսպիսով, ցույց տրվեց, որ $ax + by + c = 0$ ($a^2 + b^2 \neq 0$) տեսքի ցանկացած հավասարումով xOy կոորդինատային համակարգում տրվում է որոշակի ուղիղ գիծ:

Կարելի է ապացուցել և հակառակը. որ xOy կոորդինատային համակարգում տրված ցանկացած ուղիղ $ax + by + c = 0$ տեսքի հավասարում է:

Այժմ ցույց տանք, որ R շառավղով և $A(a; b)$ կենտրոնով շրջանագիծը xOy կոորդինատային համակարգում տրվում է

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \qquad (4)$$

հավասարումով:

Դիցուք, տրված է R շառավղով և $A(a; b)$ կենտրոնով շրջանագիծ: Շրջանագծի վրա վերցնենք $M(x; y)$ կետ: Երկրաչափության դասընթացից հայտնի է, որ A և M կետերի հեռավորությունը հաշվվում է

$$AM = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

բանաձևով:

Այդ հեռավորության քառակուսին հավասար է շրջանագծի շառավղի քառակուսուն.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2:$$

Քանի որ M-ը շրջանագծի կամայական կետ է, ապա (4) հավասարությունը տեղի է ունենում շրջանագծի ցանկացած կետի համար:

Կարելի է ապացուցել և հակառակ պնդումը. (4) տեսքի ցանկացած հավասարումով xOy կոորդինատային համակարգում տրվում է R շառավղով և $(a; b)$ կենտրոնով շրջանագիծ:

94. Ապացուցեք, որ $y = kx$ ֆունկցիայի գրաֆիկը xOy կոորդինատային համակարգում $O(0; 0)$ և $B(1; k)$ կետերով անցնող ուղիղ գիծ է:

95. Գրեք տրված կետերով անցնող ուղիղ գծի հավասարումը.
ա) $A(2; 3)$ և $B(4; 5)$; բ) $A(-5; 0)$ և $B(0; 10)$:

96.* Գրեք AB հատվածի միջնուղղահայացի հավասարումը.
ա) $A(2; 3)$ և $B(4; 5)$; բ) $A(6; 0)$ և $B(0; 3)$:

97.* Ապացուցեք, որ ցանկացած ուղիղ xOy կոորդինատային համակարգում տրվում է $ax + by + c = 0(a^2 + b^2 \neq 0)$ հավասարումով:

98. Գրեք R շառավղով և A կենտրոնով շրջանագծի հավասարումը.
ա) $A(3; 5)$, $R = 4$; բ) $A(0; 6)$, $R = 5$;
գ) $A(3; 4)$, $R = 5$:
Անցնո՞ւմ է արդյոք այդ շրջանագիծը կոորդինատների սկզբնակետով:

99.* O (0; 0) կենտրոնով և R շառավղով շրջանագծի հավասարումն ունի $x^2 + y^2 = R^2$ տեսքը, հետևաբար՝ $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը վերին կիսաշրջանագիծն է (նկ. 122):

Կառուցեք ֆունկցիայի գրաֆիկը.

ա) $y = \sqrt{4 - x^2}$,

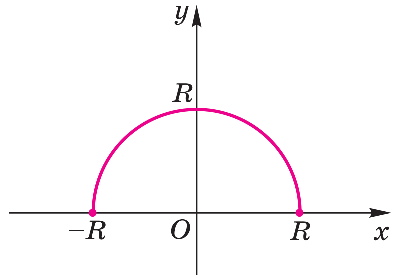
բ) $y = -\sqrt{4 - x^2}$,

գ) $y = \sqrt{9 - (x - 1)^2}$,

դ) $y = -\sqrt{9 - (x - 1)^2}$,

ե) $y = \sqrt{16 - (x + 2)^2} - 2$,

զ) $y = -\sqrt{25 - (x - 3)^2} + 1$:



Նկ. 122

100.* Կառուցեք ֆունկցիայի գրաֆիկը.

ա) $y = 3 - \sqrt{9 - x^2 - 8x}$,

բ) $y = 4 - \sqrt{9 - x^2 - 8x}$,

գ) $y = 12 - \sqrt{125 - x^2 - 20x}$,

դ) $y = -5 - \sqrt{69 - x^2 - 20x}$:

§ 2. ՄԵԿ ԱՆՀԱՅՏՈՎ ԵՐԿՐՈՐԴ ԱՍՏԻՃԱՆԻ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

2.1 Մեկ անհայտով երկրորդ աստիճանի անհավասարման գաղափարը

$$ax^2 + bx + c > 0 \tag{1}$$

կամ

$$ax^2 + bx + c < 0 \tag{2}$$

տեսքի անհավասարումները, որտեղ a, b ***և*** c***-ն տրված թվերն են, ընդ որում*** $a \neq 0$, ***անվանում են*** x ***անհայտով երկրորդ աստիճանի անհավասարումներ:***

a-ն անվանում են x^2***-ու գործակից,*** b-ն՝ x***-ի գործակից,*** իսկ c***-ն՝ ազատ անդամ:*** ax^2, bx և c արտահայտություններն անվանում են ***(1) և (2) անհավասարումների անդամներ:***

$$ax^2 + bx + c$$

քառակուսային եռանդամի դիսկրիմինանտը (տարբերիչը) անվանում են նաև ***(1) և (2) անհավասարումների տարբերիչ:***

$$3x^2 - 4x + 5 > 0, \qquad -x^2 - 1 > 0, \qquad -6x^2 - 2x + 1 < 0, \qquad -2x^2 < 0$$

անհավասարումները երկրորդ աստիճանի անհավասարումների օրինակներ են: Հիշեցնենք, որ մեկ x անհայտով անհավասարման լուծում անվանում են այն x_0 թիվը, որն անհավասարման մեջ x-ի փոխարեն տեղադրելիս ստացվում է ճիշտ թվային անհավասարություն: Լուծել անհավասարումը նշանակում է գտնել նրա բոլոր լուծումները կամ ապացուցել, որ լուծումներ չկան: Երկրորդ աստիճանի անհավասարումների լուծման ժամանակ կօգտագործենք անհավասարումների համարժեքության մասին այն պնդումները, որոնք ձևակերպել ենք առաջին աստիճանի անհավասարումների համար (8-րդ դասարանի հանրահաշվի դասընթացում կետ 4.4): Իրականում այդ պնդումները ճիշտ են շատ ավելի ընդհանուր տիպի անհավասարումների, և մասնավորապես՝ երկրորդ աստիճանի անհավասարումների համար:

Նկատենք, որ եթե a-ն բացասական թիվ է, ապա (1) անհավասարումը բազմապատկելով -1-ով՝ վերը հիշատակված կետ 4.4-ի պնդում 4-ի համաձայն կստանանք նրան համարժեք

$$(-a)x^2 + (-b)x + (-c) < 0$$

անհավասարումը, որում x^2-ու գործակիցը դրական է:

Նույն կերպ, եթե a-ն բացասական թիվ է, ապա (2) անհավասարումը բազմապատկելով -1-ով՝ նույն պնդում 4-ի հիման վրա կստանանք նրան համարժեք

$$(-a)x^2 + (-b)x + (c) > 0$$

անհավասարումը, որում x^2-ու գործակիցը դրական է:

Հաշվի առնելով ասվածը՝ հետագայում կդիտարկենք (1) և (2) անհավասարումների լուծումները՝ համարելով, որ a-ն դրական թիվ է: Հաջորդ կետերում առանձին կդիտարկենք այդ անհավասարումների լուծումները $D > 0$, $D = 0$ և $D < 0$ դեպքերի համար:

101.° ա) Ի՞նչ տեսք ունի x փոփոխականով երկրորդ աստիճանի անհավասարումը:
բ) Ո՞րն են անվանում $ax^2 + bx + c > 0$ $(a \neq 0)$ երկրորդ աստիճանի անհավասարման տարբերիչ:
գ) Ո՞րն են անվանում մեկ x անհայտով անհավասարման լուծում:
դ) Ի՞նչ է նշանակում լուծել մեկ անհայտով անհավասարումը:
ե) Ի՞նչ է նշանակում, որ երկու անհավասարումներ համարժեք են:
զ) Ձևակերպեք անհավասարումների համարժեքության մասին պնդումները:

102. Արդյոք հետևյալ անհավասարումները՝

ա) $3 - 2x > 0$; բ) $\dfrac{7x-3}{5} < 1$; գ) $x^2 - 5x + 1 < 0$;

դ) $7x - \dfrac{x}{3} > 0$; ե) $4x - 5x^2 > 0$; զ) $3x^2 + 7 < 0$;

առաջին աստիճանի, գծային, երկրորդ աստիճանի են:

103. Տրված անհավասարումը բերեք $ax^2 + bx + c > 0$ կամ $ax^2 + bx + c < 0$ տեսքի և անվանեք x^2-ու գործակիցը և ազատ անդամը.
ա) $4x + 2x^2 - 1 > 0$; բ) $6 + x^2 < 0$;

գ) $\frac{x^2}{3} - x + 0{,}2 < 0$;　　　դ) $1 - 7x + \frac{x^2}{2} > 0$:

Արդյոք փակագծերում նշված թիվը անհավասարման լուծում է (104-105).

104. ա) $x^2 - 3x + 4 > 0 \left(\frac{1}{3}\right)$;　　　բ) $x^2 - 2x + 3 < 0 \left(\frac{1}{2}\right)$;

գ) $2x^2 - 5x - 1 < 0$ (-2);　　　դ) $3x^2 - 3x + 1 > 0$ (-3);

ե) $\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{1}{7} < 0$ (15);　　　զ) $\frac{x^2}{4} + x - \frac{1}{7} < 0$ (12);

105.* ա) $x^2 - 11{,}7x + 17 < 0$ $(\sqrt{3})$;　　　բ) $x^2 - 11{,}4x + 14 > 0$ $(\sqrt{2})$;

գ) $x^2 + x - 12 > 0$ (π);　　　դ) $x^2 - 2x - 15 < 0$ $(-\pi)$:

106. Գրեք տրված անհավասարմանը համարժեք անհավասարում, որում x^2-ու գործակիցը դրական է.

ա) $-x^2 + 5x + 7 > 0$;　　　բ) $-2x^2 - 4x + 8 < 0$;

գ) $-\frac{1}{3}x^2 + 9 > 0$;　　　դ) $-\frac{3}{5}x^2 - 5 < 0$:

107. Գրեք տված անհավասարմանը համարժեք անհավասարում, որում x^2-ու գործակիցը 1 է.

ա) $-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 5 > 0$;　　　բ) $-\frac{1}{3}x^2 - 8x + 3 < 0$;

գ) $\frac{1}{5}x^2 - 5x + 7 > 0$;　　　դ) $-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 1 < 0$:

108. Բաժանելով անհավասարման երկու մասերը x^2-ու գործակցի, x-ի գործակցի և ազատ անդամի ընդհանուր բաժանարարի վրա՝ գրեք տրված անհավասարմանը համարժեք անհավասարում.

ա) $4x^2 - 6x + 10 > 0$;　　　բ) $-6x^2 - 12x - 6 < 0$;

գ) $-9x^2 - 90x - 81 > 0$;　　　դ) $10x^2 - 20x + 30 > 0$;

ե) $12x^2 - 16x + 8 < 0$;　　　զ) $-11x^2 - 44x - 33 < 0$:

2.2 Դրական տարբերիչով երկրորդ աստիճանի անհավասարումներ

Դիցուք, պետք է լուծել

$$ax^2 + bx + c > 0 \qquad (1)$$

անհավասարումը, որտեղ a, b և c-ն տրված թվերն են, ընդ որում՝ $a > 0$,

$$D = b^2 - 4ac > 0:$$

Ինչպես արդեն գիտենք, այդ դեպքում՝

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \qquad (2)$$

որտեղ x_1-ը և x_2-ը $ax^2 + bx + c$ եռանդամի արմատներն են: Ուստի, (1) անհավասարումը կարելի է արտագրել

$$a(x - x_1)(x - x_2) > 0 \qquad (3)$$

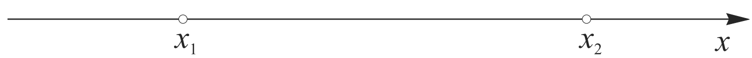
տեսքով: Քանի որ a-ն դրական թիվ է, ապա

$$(x - x_1)(x - x_2) > 0 \qquad (4)$$

անհավասարումը համարժեք է (3) անհավասարմանը:

Նկատենք, որ $x = x_1$ և $x = x_2$ թվերը չեն բավարարում (4) անհավասարմանը: Քանի որ $D > 0$, ապա $x_1 \neq x_2$: Որոշակիության համար կհամարենք, որ $x_1 < x_2$:

Ox կոորդինատային ուղղի վրա նշենք x_1 և x_2 կետերը (նկ.11):



Նկ. 11

Այդ կետերը Ox առանցքը բաժանում են երեք միջակայքերի՝ $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $(x_2; +\infty)$:

Եթե $x \in (x_2; +\infty)$, ապա՝

$$x - x_1 > 0 \text{ և } x - x_2 > 0,$$

հետևաբար՝

$$(x - x_1)(x - x_2) > 0:$$

Եթե $x \in (x_1; x_2)$, ապա՝

$$x - x_1 > 0 \text{ և } x - x_2 < 0$$

հետևաբար՝

$$(x - x_1)(x - x_2) < 0:$$

Իսկ եթե $x \in (-\infty; x_1)$, ապա՝

$$x - x_1 < 0 \text{ և } x - x_2 < 0,$$

հետևաբար՝

$$(x - x_1)(x - x_2) > 0:$$

Ուստի, (1) անհավասարման բոլոր լուծումների բազմությունը բաղկացած է երկու միջակայքերից՝ $(-\infty; x_1)$ և $(x_2; +\infty)$: Այդ բազմությունը գրում են բազմությունների միավորման $\cup$ նշանով՝ $(-\infty; x_1)\cup(x_2; +\infty)$, և կարդում այսպես՝ «$(-\infty; x_1)$ և $(x_2; +\infty)$ միջակայքերի միավորում»:

Նշենք, որ

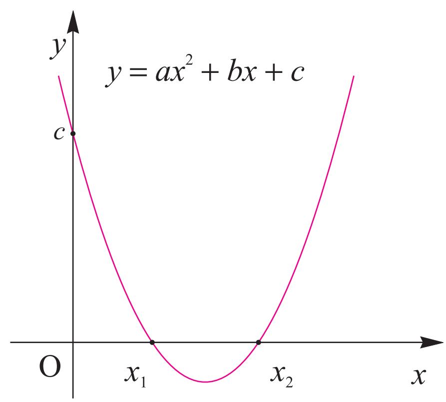
$$ax^2 + bx + c < 0 \ (a > 0, \mathrm{D} > 0) \qquad (5)$$

անհավասարման բոլոր լուծումների բազմությունը, ինչպես տեսանք, $(x_1; x_2)$ միջակայքն է:

Մեր ստացած արդյունքին կարելի էր գալ նաև՝ օգտագործելով

$$y = ax^2 + bx + c \ (a > 0) \qquad (6)$$

քառակուսային ֆունկցիայի գրաֆիկը: Հաշվի առնելով, որ $a > 0$, $\mathrm{D} > 0$ և $x_1 < x_2$, սխեմատիկորեն ցույց տանք, թե կոորդինատային հարթության վրա ինչպես է դասավորված (6) ֆունկցիայի գրաֆիկը (նկ. 12):



Նկ. 12

Ակնհայտ է, որ այն x-երի համար, որոնց համապատասխանող պարաբոլի կետերը դասավորված են Ox առանցքից վերև, տեղի է ունենում (1) անհավասարումը, իսկ այն x-երի համար, որոնց համապատասխանող կետերը դասավորված են Ox առանցքից ներքև՝ (5) անհավասարումը: Նկար 12-ից երևում է, որ $ax^2 + bx + c > 0$ անհավասարման լուծումը բաղկացած է $(-\infty; x_1)$ և $(x_2; +\infty)$ միջակայքերից, իսկ $ax^2 + bx + c < 0$ անհավասարման լուծումների բազմությունը $(x_1; x_2)$ միջակայքն է:

Այսպիսով, $ax^2 + bx + c > 0$ կամ $ax^2 + bx + c < 0$ անհավասարումը լուծելու համար ($\mathrm{D} > 0$ դեպքում) պետք է գտնել $ax^2 + bx + c$ քառակուսային եռանդամի x_1 և x_2 արմատները ($x_1 < x_2$), որոշել եռանդամի նշանները

$$(-\infty, x_1), (x_1; x_2) \text{ և } (x_2; +\infty)$$

միջակայքերում և պատասխանում գրել այն միջակայքը (կամ միջակայքերի միավորումը), որում անհավասարումը տեղի է ունենում:

ՕՐԻՆԱԿ 1. Լուծենք

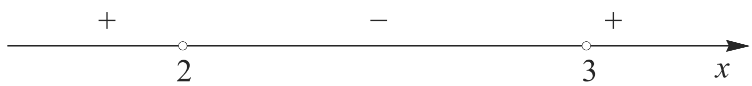
$$x^2 - 5x + 6 < 0 \qquad (7)$$

անհավասարումը: (7) անհավասարման տարբերիչը՝ D = 1 > 0 և $x^2 - 5x + 6$ եռանդամը, ունի երկու արմատ՝ $x_1 = 2$ և $x_2 = 3$: Ուստի, (7) անհավասարումը կարելի է գրել

$$(x - 2)(x - 3) < 0 \qquad (8)$$

տեսքով:

Ox կոորդինատային առանցքի վրա նշենք 2 և 3 կետերը (նկ. 13).

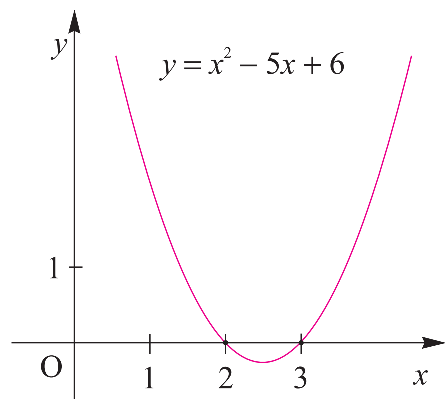


Նկ. 13

Հեշտ է տեսնել, որ $(x - 2)(x - 3)$ արտահայտությունը 3-ից աջ գտնվող ցանկացած x-ի համար դրական է, 2-ի և 3-ի միջև գտնվող x-երի համար՝ բացասական և 2-ից ձախ գտնվող ցանկացած x-ի համար՝ դրական:

Ուստի, (8) անհավասարման և հետևաբար նրան համարժեք (7) անհավասարման բոլոր լուծումների բազմությունը (2; 3) միջակայքն է:

Նույն արդյունքը կարելի է ստանալ՝ օգտագործելով $y = x^2 - 5x + 6$ ֆունկցիայի գրաֆիկը (նկ. 14):



Նկ. 14

Պատասխան՝ (2; 3):

Օրինակ 2. Լուծենք

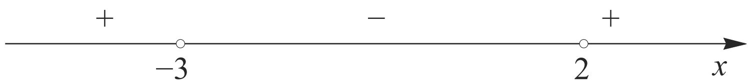
$$-x^2 - x + 6 < 0 \qquad (9)$$

անհավասարումը: Բազմապատկելով այդ անհավասարումը –1-ով՝ կստանանք նրան համարժեք

$$x^2 + x - 6 > 0 \qquad (10)$$

անհավասարումը, որում x^2-ու գործակիցն արդեն դրական է:

Այս անհավասարման տարբերիչը՝ D = 25 > 0: $x^2 + x - 6$, քառակուսային եռանդամի արմատներն են՝ $x_1 = -3$ և $x_2 = 2$: Ox կոորդինատային առանցքի վրա նշենք –3 և 2 կետերը (նկ. 15).



Նկ. 15

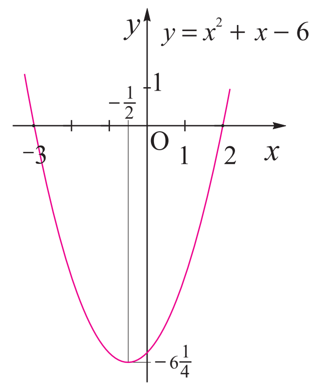
Դատելով օրինակ 1-ից՝ կստանանք, որ (10) անհավասարման և հետևաբար նրան համարժեք (9) անհավասարման բոլոր լուծումների բազմությունը $(-\infty; -3)$ և $(2; +\infty)$ միջակայքերի միավորումն է:

Նույն եզրակացությանը կգանք նկ. 16-ի օգնությամբ, որտեղ պատկերված է

$$y = x^2 + x + 6$$

պարաբոլը:

Պատասխան՝ $(-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$:

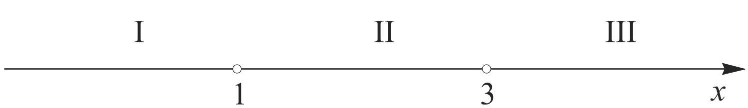


Նկ. 16

109. ա) Ինչպե՞ս է լուծվում դրական տարբերիչով երկրորդ աստիճանի անհավասարումը:
բ) Լուծում ունե՞ն արդյոք $ax^2 + bx + c > 0$ և $ax^2 + bx + c < 0$ անհավասարումները, եթե $a > 0$, և նրանց տարբերիչը մեծ է զրոյից:

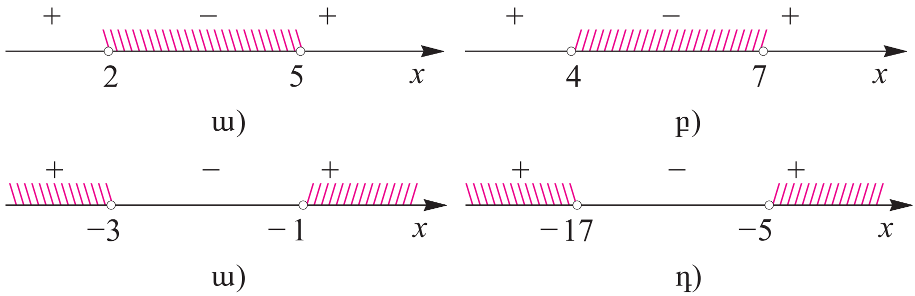
110. Նշված անհավասարումները՝
ա) $-x^2 - 5x - 6 < 0$;
բ) $-x^2 - 7x + 8 > 0$;
գ) $3x^2 - 15x - 18 > 0$;
դ) $-2x^2 - 8x + 10 > 0$;
բերեք $(x - x_1)(x - x_2) > 0$ կամ $(x - x_1)(x - x_2) < 0$ տեսքի:

111. Նկար 17-ում նշված են 1 և 3 թվերը, որոնք $(x - 1)(x - 3)$արտադրյալը դարձնում են զրո: Պարզեք՝ ինչ նշաններ ունի յուրաքանչյուր արտադրիչը և նրանց արտադրյալը I, II և III միջակայքերից յուրաքանչյուրում:



Նկ. 17

112. Կազմեք մեկ անհայտով երկրորդ աստիճանի անհավասարում, որի բոլոր լուծումների բազմությունը նկար 18-ում նշված է ստվերագծով:



Նկ. 18

113. Լուծեք անհավասարումը և պարզեք՝ արդյոք փակագծերում նշված թիվը անհավասարման լուծում է.

ա) $9x^2 - 10x + 1 < 0$ (0,(3));　　　բ) $3x^2 - 14x + 8 > 0$ (3,(8));

գ) $5x^2 - 6x - 11 < 0$ $\left(\sqrt{5}\right)$;　　　դ) $6x^2 - 5x - 4 > 0$ (1,(3)):

114. Լուծեք անհավասարումը և կոորդինատային ուղղի վրա նշեք դրա լուծումների բազմությունը:

ա) $(x - 9)(x - 2) > 0$;　　　բ) $(x - 8)(x - 19) < 0$;

գ) $(x + 3)(x - 5) < 0$;　　　դ) $(x - 4)(x + 7) > 0$:

Լուծեք անհավասարումը (115-120).

115. ա) $(2x - 1)(3x + 5) < 0$;　　　բ) $(1{,}2x - 0{,}75)(7x - 1) < 0$;

գ) $(4x + 3)(5x + 2) > 0$;　　　դ) $\left(1\dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{12}\right)(0{,}7x + 4) > 0$:

116. ա) $x^2 - x > 0$;　　　բ) $x^2 + x < 0$;

գ) $5x^2 - x < 0$;　　　դ) $3x^2 + x > 0$;

ե) $4x^2 + 7x > 0$;　　　զ) $3x - 2x^2 < 0$;

117. ա) $x^2 - 4 > 0$;　　　բ) $x^2 - 9 < 0$;

գ) $x^2 - 100 < 0$;　　　դ) $1 - x^2 > 0$:

118. ա) $x^2 - 3 > 0$;　　　բ) $x^2 - 5 < 0$;

գ) $2 - x^2 < 0$;　　　դ) $13 - x^2 > 0$:

119. ա) $0,5x^2 - x < 0$; բ) $1,3x^2 - 2x < 0$;
գ) $3\frac{1}{2}x - x^2 > 0$; դ) $\frac{7}{8}x^2 - 1\frac{3}{5} > 0$:

120. ա) $2x^2 - 3 < 0$; բ) $7x^2 - 1 > 0$;
գ) $5 - 0,2x^2 > 0$; դ) $1,2 - 3x^2 < 0$:

Լուծեք անհավասարումը (121-122).

121. ա) $x^2 - 3x + 2 > 0$; բ) $x^2 + 4x + 3 < 0$;
գ) $x^2 + 5x + 6 < 0$; դ) $x^2 - 5x + 4 > 0$;
ե) $3x^2 - 2x - 5 < 0$; զ) $4x^2 - x - 3 < 0$;
է) $7x^2 + 2x - 5 > 0$; ը) $10x^2 + 3x - 1 > 0$:

122. ա) $0,25x^2 - 4x + 12 > 0$; բ) $0,5x^2 + 88x + 24 < 0$;
գ) $3 - x + \frac{1}{16}x^2 < 0$; դ) $4x + \frac{1}{4}x^2 + 12 > 0$;
ե) $5x^2 - x - 7 < 0$; զ) $8x^2 - 3 - 2x > 0$;
է) $2x^2 + 5 - 17x > 0$; ը) $15x + 3 + 4x^2 < 0$:

123. x-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում են ֆունկցիայի գրաֆիկի կետերը դասավորված Ox առանցքից վերև, Ox առանցքից ներքև.
ա) $y = x^2 - 6x + 8$; բ) $y = x^2 - 2x - 8$;
գ) $y = -x^2 + 2x + 3$; դ) $y = -x^2 + x + 12$:

124. Նշեք x-ի բոլոր այն արժեքները, որոնցից յուրաքանչյուրի դեպքում ֆունկցիան ընդունում է դրական և բացասական արժեքներ.
ա) $y = x^2 + 1,5x - 1$; բ) $y = x^2 - 3,5x + 2$;
գ) $y = 4x^2 + 19x - 5$; դ) $y = 3x^2 - 5x - 2$;
ե) $y = -2x^2 + 5x + 3$; զ) $y = -3x^2 - 8x + 9$:

2.3 Զրոյի հավասար տարբերիչով երկրորդ աստիճանի անհավասարումների լուծումը

Դիցուք, անհրաժեշտ է լուծել

$$ax^2 + bx + c > 0 \qquad (1)$$

անհավասարումը, որտեղ a, b և c-ն տրված թվերն են, ընդ որում՝ $a > 0$.

$$D = b^2 - 4ac = 0:$$

Ինչպես արդեն գիտենք, այս դեպքում

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2,$$

որտեղ $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$-ն $ax^2 + bx + c$ քառակուսային եռանդամի արմատն է:

Ուստի, (1) անհավասարումը կարելի է գրել

$$a(x - x_0)^2 > 0$$

տեսքով:

$x = x_0$ դեպքում $(x - x_0)^2$ բազմանդամը հավասար է զրոյի: Իսկ x-ի ցանկացած այլ թվային արժեքի համար $(x \neq x_0)$ $(x - x_0)^2$ բազմանդամը և հետևաբար $a(x - x_0)^2$ բազմանդամն ընդունում են դրական արժեքներ: Հետևաբար, (1) անհավասարման լուծում կլինի ցանկացած x թիվ, բացի $x = x_0$ թվից: Այլ կերպ ասած՝ (1) անհավասարման բոլոր լուծումների բազմությունը բաղկացած է երկու միջակայքերից՝ $(-\infty; x_0)$ և $(x_0; +\infty)$, որտեղ x_0-ն $ax^2 + bx + c$ եռանդամի արմատն է:

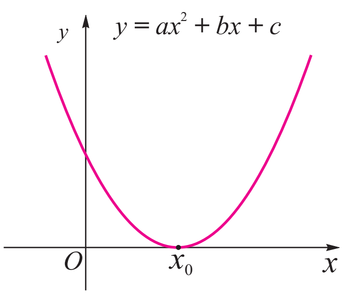
Ասվածից հետևում է նաև, որ քննարկվող դեպքում ($a > 0$, $D = 0$)

$$ax^2 + bx + c < 0 \qquad (2)$$

անհավասարումը լուծումներ չունի:

Նույն եզրակացությանը կարելի է գալ՝ օգտագործելով

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (3)$$



Նկ. 19

քառակուսային ֆունկցիայի գրաֆիկը: Քանի որ $a > 0$, $D = 0$, ապա (3) ֆունկցիայի գրաֆիկից անմիջապես երևում է, որ (1) անհավասարումը ճիշտ է բոլոր x-երի համար, բացի

$$x = x_0 = -\frac{b}{2a}$$

արժեքից, իսկ (2) անհավասարումը լուծում չունի (նկ. 19):

Այսպիսով, D = 0 դեպքում

$$ax^2 + bx + c > 0$$

կամ

$$ax^2 + bx + c < 0$$

անհավասարումը լուծելու համար պետք է գտնել $ax^2 + bx + c$ քառակուսային եռանդամի x_0 արմատը, պարզել եռանդամի նշանը $(-\infty;\ x_0)$ և $(x_0;\ +\infty)$ միջակայքերում և պատասխանում գրել $(-\infty;\ x_0)\cup(x_0;\ +\infty)$, եթե անհավասարումը տեղի է ունենում այդ երկու միջակայքերից յուրաքանչյուրում կամ «լուծումներ չկան», եթե անհավասարումը տեղի չի ունենում (կամ հակիրճ գրում են՝ ϕ):

ՕՐԻՆԱԿ. Լուծենք

$$4x^2 + 4x + 1 > 0 \qquad (4)$$

և

$$4x^2 + 4x + 1 < 0 \qquad (5)$$

անհավասարումները:

Գտնենք (4) և (5) անհավասարումների տարբերիչը.

$$D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 0:$$

Քանի որ տարբերիչը զրո է, ապա $4x^2 + 4x + 1$ քառակուսային եռանդամն ունի $x_0 = -\dfrac{1}{2}$ միակ արմատը և $4x^2 + 4x + 1 > 0$ բոլոր $x \neq -\dfrac{1}{2}$ թվերի համար, որտեղից և հետևում է, որ (4) անհավասարման բոլոր լուծումների բազմությունը բաղկացած է $\left(-\infty;\ -\dfrac{1}{2}\right)$ և $\left(-\dfrac{1}{2};\ +\infty\right)$ երկու միջակայքերից:

Իսկ (5) անհավասարումը, ակնհայտ է, լուծում չունի:

125.° Լուծում ունի՞ արդյոք երկրորդ աստիճանի անհավասարումը, եթե նրա տարբերիչը զրո է: Ի՞նչ դեպքեր են հնարավոր:

126. Գտեք x-ի բոլոր այն արժեքները, որոնցից յուրաքանչյուրի դեպքում արտահայտությունն ընդունում է դրական արժեք.

ա) $2x^2$; բ) $\dfrac{x^2}{2}$; գ) $(x + 3)^2$; դ) $(x - 1)^2$:

127. Գոյություն ունի՞ x-ի արժեք, որի դեպքում արտահայտությունն ընդունում է դրական արժեք.

ա) $-x^2$; բ) $-3x^2$; գ) $(2 - x)^2$; դ) $-(x + 4)^2$:

128. Պարզեք՝ արդյոք անհավասարման լուծում է փակագծերում նշված թիվը.

ա) $25x^2 - 10x + 1 < 0 \left(-1\frac{2}{7}\right)$;   բ) $4x^2 + 12x + 9 > 0$ $(-2,5)$;

գ) $x^2 - x + 0,25 > 0 \left(\sqrt{3}\right)$;   դ) $x^2 + x + \frac{1}{4} < 0$ $(-1,7)$:

Լուծեք անհավասարումը (129-132).

129. ա) $(x - 4)^2 > 0$;   բ) $(x + 1)^2 > 0$;
գ) $(2x - 3)^2 > 0$;   դ) $(7 - 4x)^2 > 0$:

130. ա) $x^2 - 4x + 4 > 0$;   բ) $x^2 - 2x + 1 > 0$;
գ) $x^2 + 10x + 25 < 0$;   դ) $x^2 - 8x + 16 < 0$:

131.* ա) $x^2 - 2x + 1 > 0$;   բ) $x^2 + 6x + 9 < 0$;
գ) $x^2 + 4x + 4 < 0$;   դ) $4x^2 - 4x + 1 > 0$:

132. ա) $4x^2 + 20x + 25 < 0$;   բ) $9x^2 - 36x + 36 > 0$;
գ) $49x^2 + 14x + 1 > 0$;   դ) $25x^2 - 10x + 1 < 0$;
ե) $2x^2 + 3x + 1\frac{1}{8} > 0$;   զ) $9x^2 - 10x + 2\frac{7}{9} < 0$:

133. Գտեք k-ի բոլոր այն արժեքները, որոնցից յուրաքանչյուրի դեպքում
ա) $x^2 - 24x + k > 0$-ն ճիշտ է x-ի բոլոր արժեքների համար, բացի $x = 12$ արժեքից:
բ) $64x^2 + kx + 9 > 0$-ն ճիշտ է x-ի բոլոր արժեքների համար, բացի $x = -\frac{3}{8}$ արժեքից:

134. Գտեք x-ի բոլոր այն արժեքները, որոնցից յուրաքանչյուրի դեպքում անհավասարումը ճիշտ չէ.
ա) $x^2 + 8x + 16 > 0$,   բ) $9x^2 - 6x + 1 < 0$:

2.4 Բացասական տարբերիչով երկրորդ աստիճանի անհավասարումներ

Դիտարկենք

$$ax^2 + bx + c > 0 \qquad (1)$$

անհավասարումը, որտեղ a, b և c-ն տված թվեր են և $a > 0$, $D = b^2 - 4ac < 0$:

$ax^2 + bx + c$ քառակուսային եռանդամից առանձնացնելով լրիվ քառակուսի՝ կստանանք.

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}: \qquad (2)$$

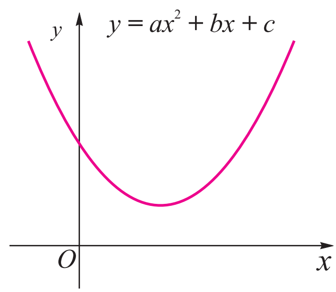
(2) հավասարությունից հետևում է, որ (1) անհավասարումը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով.

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a} > 0,$$

որտեղից, հաշվի առնելով, որ $a > 0$ և $D < 0$, տեսնում ենք, որ (1) անհավասարումը տեղի է ունենում x-ի ցանկացած արժեքի համար, այսինքն՝ $(-\infty; +\infty)$ միջակայքում: $a > 0$ և $D < 0$ դեպքում

$$y = ax^2 + bx + c$$

ֆունկցիայի գրաֆիկը սխեմատիկորեն պատկերված է նկ. 21-ում: Ամբողջ պարաբոլը դասավորված է Ox առանցքից վերև և այդ պատճառով (1) անհավասարումը ճիշտ է x-ի ցանկացած արժեքի համար (նկ. 21):



Նկ. 21

Այստեղից նաև հետևում է, որ վերը նշված պայմանների դեպքում՝ ($a > 0$, $D < 0$),

$$ax^2 + bx + c < 0$$

անհավասարումը լուծումներ չունի:

Այսպիսով, $ax^2 + bx + c > 0$ կամ $ax^2 + bx + c < 0$ անհավասարումը (որտեղ $D < 0$) լուծելու համար պետք է որոշել եռանդամի նշանը $(-\infty; +\infty)$-ում և պատասխանում գրել $(-\infty; +\infty)$, եթե այդ միջակայքում անհավասարումը տեղի է ունենում կամ գրել «լուծումներ չկան», եթե անհավասարումը տեղի չի ունեցել:

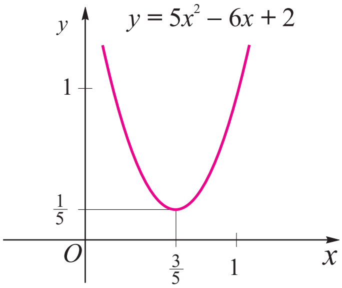
ՕՐԻՆԱԿ. Լուծենք

$$5x^2 - 6x + 2 > 0, \qquad (3)$$

$$5x^2 - 6x + 2 < 0 \qquad (4)$$

անհավասարումները:

Դրանցից յուրաքանչյուրի տարբերիչը՝ $D = -4 < 0$, նշանակում է $5x^2 - 6x + 2$ եռանդամը արմատներ չունի և $(-\infty, +\infty)$ միջակայքում ունի «+» նշանը:



Նկ. 22

Ուստի, (3) անհավասարումը տեղի է ունենում ցանկացած x-ի համար, այսինքն՝ $(-\infty, +\infty)$ միջակայքում, իսկ (4) անհավասարումը լուծումներ չունի:

Նկար 22-ում պատկերված է

$$y = 5x^2 - 6x + 2$$

պարաբոլը: Նկարից երևում է, որ (3) անհավասարումը ճիշտ է ցանկացած x-ի համար, իսկ (4) անհավասարումը լուծում չունի (նկ. 22):

135.° Լուծում ունի՞ արդյոք երկրորդ աստիճանի անհավասարումը, եթե նրա տարբերիչը փոքր է զրոյից: Ի՞նչ դեպքեր են հնարավոր:

136. Քառակուսային ֆունկցիայի գրաֆիկի օգնությամբ բացատրեք՝ ինչո՞ւ $ax^2 + bx + c < 0$ անհավասարումը $a > 0$ և $D < 0$ դեպքում լուծում չունի:

Լուծեք անհավասարումը (137-140).

137. ա) $x^2 - x + 3 > 0$; բ) $x^2 + 2x + 2 < 0$;
գ) $x^2 - 3x + 4 < 0$; դ) $x^2 + x + 5 < 0$:

138. ա) $3x^2 - 2x + 1 > 0$; բ) $5x^2 - 4x + 2 < 0$;
գ) $-4x^2 + x - 6 < 0$; դ) $-7x^2 + 3x - 1 > 0$:

139. ա) $0{,}2x^2 - x + 100 > 0$; բ) $1{,}7x^2 + x + 10 < 0$;
գ) $\dfrac{x^2}{5} - \dfrac{3x}{7} + 8 < 0$; դ) $\dfrac{2x^2 - x}{3} - 12 > 0$:

140. ա) $x^2 - 4{,}8x - 1 < 0$; բ) $x^2 + 3{,}5x - 2 > 0$:

141.* Նշեք m-ի բոլոր այն արժեքները, որոնցից յուրաքանչյուրի դեպքում անհավասարումը ճիշտ է x-ի ցանկացած արժեքի համար.

ա) $2x^2 - x + m > 0$, բ) $3x^2 + 2x + m > 0$:

2.5 Երկրորդ աստիճանի անհավասարման բերվող անհավասարումներ

Հաճախ անհրաժեշտություն է լինում լուծել անհավասարումներ, որոնց ձախ և աջ մասերը բազմանդամներ են:

Այդպիսի անհավասարումների լուծման համար կարելի է կիրառել անհավասարումների համարժեքության մասին մեզ հայտնի պնդումները: Այդ պնդումների հիման վրա, անհավասարման բոլոր անդամները տեղափոխելով նրա ձախ մասը և կատարելով նման անդամների միացում, կստանանք սկզբնականին համարժեք անհավասարում: Ստացված անհավասարման աջ մասում կլինի զրո թիվը, իսկ ձախ մասում՝ բազմանդամը: Այս կետում կդիտարկվեն երկրորդ աստիճանի անհավասարումների բերվող անհավասարումների լուծումների օրինակներ:

ՕՐԻՆԱԿ 1. Լուծենք

$$x^2 - 2x + 3 > 2x^2 - 3 - x \qquad (1)$$

անհավասարումը: Տեղափոխելով անհավասարման բոլոր անդամները ձախ կողմը՝ կստանանք նրան համարժեք

$$x^2 - 2x + 3 - 2x^2 + 3 + x > 0 \qquad (2)$$

անհավասարումը: (2) անհավասարման ձախ կողմում կատարելով նման անդամների միացում՝ ստանում ենք դրան համարժեք

$$-x^2 + x + 6 > 0 \qquad (3)$$

անհավասարումը: Բազմապատկելով այն –1-ով՝ կստանանք դրան համարժեք երկրորդ աստիճանի անհավասարում, որում x^2-ու գործակիցը դրական է.

$$x^2 + x - 6 < 0: \qquad (4)$$

(4) անհավասարման դիսկրիմինանտը՝ $D = 25 > 0$: $x^2 + x - 6$ քառակուսային եռանդամը, ունի երկու արմատ՝ $x_1 = -3$ և $x_2 = 2$: Ուրեմն (2) անհավասարումը կարելի է գրել

$$(x - (-3))(x - 2) < 0 \qquad (5)$$

տեսքով:

Ox կոորդինատային առանցքի վրա նշենք –3 և 2 կետերը (տե՛ս նկ.15):

Հեշտ է տեսնել, որ $(x - (-3))(x - 2)$ արտահայտությունը դրական է բոլոր այն x-երի համար, որոնք դասավորված են 2-ից աջ, բացասական է բոլոր այն x-երի համար, որոնք գտնվում են –3 և 2 կետերի միջև, դրական է բոլոր այն x-երի համար, որոնք դասավորված են –3-ից ձախ:

Հետևաբար, (5) անհավասարման, ուրեմն նաև դրան համարժեք (1) անհավասարման բոլոր լուծումների բազմությունը (–3; 2) միջակայքն է:

Պատասխան` (–3; 2):

Օրինակ 2. Լուծենք

$$x^2 > 5 \tag{6}$$

անհավասարումը:

Տեղափոխելով 5-ը (6) անհավասարման ձախ կողմը` կստանանք դրան համարժեք երկրորդ աստիճանի անհավասարում.

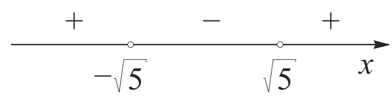
$$x^2 - 5 > 0: \tag{7}$$

$x^2 - 5$ բազմանդամը վերլուծելով գծային արտադրիչների, ստանում ենք դրան համարժեք

$$\left(x - \left(-\sqrt{5}\right)\right)\left(x - \sqrt{5}\right) > 0 \tag{8}$$

անհավասարումը:

Ox կոորդինատային առանցքի վրա նշենք $-\sqrt{5}$ և $\sqrt{5}$ թվերը (նկ. 23):



Նկ. 23

Դատելով վերևինի նման` կստանանք, որ (8), հետևաբար նաև դրան համարժեք (6) անհավասարման բոլոր լուծումների բազմությունը $\left(-\infty, -\sqrt{5}\right)$ և $\left(\sqrt{5}, +\infty\right)$ միջակայքերի միավորումն է:

Պատասխան` $(-\infty, -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$:

Օրինակ 3. Լուծենք

$$\frac{1}{5}x + \frac{1}{2} > \frac{1}{3}x^2 \tag{9}$$

անհավասարումը:

Տեղափոխելով (9) անհավասարման բոլոր անդամները ձախ կողմը` կստանանք դրան համարժեք

$$-\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{1}{2} > 0 \tag{10}$$

անհավասարումը: Քանի որ ամբողջ թվերով հաշվարկներ կատարելն ավելի հարմար է, քան կոտորակների հետ, ապա բազմապատկենք (10) անհավասարումը –30-ով: Կստանանք նրան համարժեք

$$10x^2 - 6x - 15 < 0 \tag{11}$$

անհավասարումը:

Քանի որ $10x^2 - 6x - 15$ քառակուսային եռանդամն ունի երկու արմատներ՝

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{159}}{10} \text{ և } x_2 = \frac{3 + \sqrt{159}}{10},$$

ապա (11) անհավասարումը համարժեք է

$$(x - x_1)(x - x_2) < 0 \qquad (12)$$

անհավասարմանը:

Դատելով վերևինի նման (նկ. 24)՝ կստանանք, որ (12) անհավասարման բոլոր լուծումների բազմությունը $(x_1; x_2)$ միջակայքն է:

Նկ. 24

Հետևաբար, (9) անհավասարման բոլոր լուծումների բազմությունը

$$\left(\frac{3 - \sqrt{159}}{10}; \frac{3 + \sqrt{159}}{10}\right)$$

միջակայքն է:

Պատասխան՝ $\left(\frac{3 - \sqrt{159}}{10}; \frac{3 + \sqrt{159}}{10}\right)$

142.° Ինչպե՞ս են լուծում այն անհավասարումները, որոնց ձախ և աջ մասերը բազմանդամներ են:

143. Համարժե՞ք են արդյոք անհավասարումները.
ա) $3 - x + x^2 > 0$ և $x^2 > x - 3$;
բ) $x^2 - 5 < 3x$ և $4x^2 - 12x < 20$;
գ) $\dfrac{x^2 - 7x}{2} < 4$ և $3x^2 - 21x - 24 < 0$;
դ) $x^2 + 5x - 7 > 0$ և $0{,}01x^2 - 0{,}07 > -\dfrac{1}{20}x$:

144. Անհավասարումը բերեք $ax^2 + bx + c > 0$ կամ $ax^2 + bx + c < 0$ տեսքի.
ա) $7 > 3x - 5x^2$;
բ) $2x > -3 + 2x^2$;
գ) $13x^2 - 5 < x$;
դ) $4x + 5 > x^2$:

145. Անհավասարումը բերեք $ax^2 + bx + c < 0$ տեսքի.
ա) $10x - x^2 > 1$;
բ) $4x^2 - 6 > 9$;
գ) $7 < 14x + 2x^2$;
դ) $5x^2 > 13x - 8$:

146. Անհավասարումը բերեք $x^2 + px + q = 0$ կամ $x^2 + px + q < 0$ տեսքի.
ա) $-x^2 > 7 - 3x$; բ) $-x^2 < 5x - 6$; գ) $-1{,}2x < 3 - 0{,}5x^2$:

Լուծեք անհավասարումը (147-151).

147. ա) $0{,}5x^2 > x$; բ) $1{,}3x^2 < 2x$;
գ) $3\frac{1}{2}x < x^2$; դ) $\frac{7}{8}x > 1\frac{3}{5}x^2$;
ե) $7 > 4x^2$; զ) $5 < -x^2$;
է) $2x^2 < 3$; ը) $3x^2 > -5$:

148. ա) $10x^2 > 3 + 5x$; բ) $12x^2 > 8x + 3$;
գ) $23x < 9x^2 + 8$; դ) $7x^2 - 6 > 25x$:

149. ա) $5(x - 1)^2 > 5(1 - x) - x$;
բ) $2(x + 1)^2 < 2(2x + 1) - (x - 1)(x + 1)$;
գ) $(x - 1)^2 + (x - 2)^2 < 1$;
դ) $(x + 3)(x - 2) > 3x + 10 - (x + 2)^2$:

150. ա) $x^2 > 6x - 9$; բ) $16x^2 < 8x - 1$;
գ) $4 - 3x < 1 - 2x^2$; դ) $6x > 12 - 5x^2$;
ե) $x^2 - 7x + 5 > 3x^2 - 5x$; զ) $4x^2 + 8x > 7x - 12$:

151. ա) $\frac{x-1}{3} + 0{,}2x^2 < 1$; բ) $x^2 - \frac{7-2x}{4} > 0{,}2$;
գ) $\frac{(x-1)(x-2)}{15} < \frac{x+1}{5} - \frac{x}{3}$; դ) $\frac{12-x^2}{4} - \frac{x}{3} < \frac{(x-3)^2}{12}$:

Գտեք ֆունկցիայի որոշման տիրույթը (152-153).

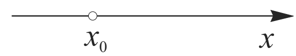
152. ա) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; բ) $y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$; գ) $y = \frac{5x}{\sqrt{1-x}}$;
դ) $y = \frac{4}{\sqrt{x^2}}$; ե) $y = \frac{-x}{\sqrt{x^2-1}}$; զ) $y = \frac{8x-7}{\sqrt{x^2+4}}$;
է) $y = \frac{x^2-4x}{\sqrt{x^2-4}}$; ը) $y = \frac{9x}{\sqrt{x^2+3}}$; թ) $y = \frac{-12}{\sqrt{x^2-14x+4}}$;
ժ) $y = \frac{1}{\sqrt{2-3x-x^2}}$; ի) $y = \frac{-5x}{\sqrt{x^2-3}}$; լ) $y = \frac{5+x^2}{\sqrt{5-x^2}}$:

153. ա) $y = \dfrac{1}{|x-1|}$; բ) $y = \dfrac{2}{|x+1|}$; գ) $y = \dfrac{4}{|x|}$;

դ) $y = \dfrac{3}{\sqrt{x^2-2x+1}}$; ե) $y = \dfrac{1-5x}{\sqrt{x^2+4x+4}}$; զ) $y = \dfrac{x^2-9}{\sqrt{x^2-6x+9}}$:

Ռացիոնալ անհավասարումներ

2.6 Միջակայքերի եղանակը



Նկ. 25

Ox կոորդինատային առանցքի վրա նշենք x_0 կետը (նկ. 25):

x_0 կետը Ox առանցքը բաժանում է երկու մասերի

1) x կետից աջ գտնվող ցանկացած x-ի համար $x - x_0$ երկանդամը դրական է,
2) x կետից ձախ գտնվող ցանկացած x-ի համար $x - x_0$ երկանդամը բացասական է:

Երկանդամի այս հատկությունն ընկած է միջակայքերի եղանակի հիմքում: Դիցուք, պահանջվում է լուծել

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) > 0 \qquad (1)$$

կամ

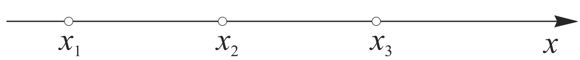
$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) < 0 \qquad (2)$$

անհավասարումը, որտեղ

$$x_1 < x_2 < x_3:$$

Ox առանցքի վրա նշենք x_1, x_2 և x_3 կետերը: Դրանք Ox առանցքը բաժանում են չորս միջակայքերի (նկ. 26).

$$(-\infty; x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3; +\infty)$$



Նկ. 26

Դիտարկենք

$$A(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \qquad (3)$$

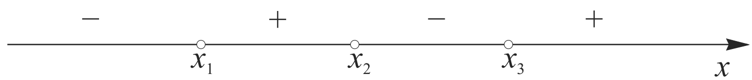
արտահայտությունը:

Ակնհայտ է, որ x_3-ից աջ գտնվող բոլոր x-երի համար (3) արտահայտության բոլոր երկանդամները դրական են, քանի որ x-ը մեծ է x_1-ից, x_2-ից և x_3-ից: Ուստի, $A(x) > 0$ $(x_3; +\infty)$ միջակայքին պատկանող ցանկացած x-ի համար:

x_2-ի և x_3-ի միջև գտնվող ցանկացած x-ի համար (3) արտադրյալի վերջին արտադրիչը բացասական է, քանի որ $x < x_3$, իսկ մնացած երկուսը դրական են, որովհետև $x > x_2$ և $x > x_1$: Ուրեմն, $(x_2; x_3)$ միջակայքին պատկանող ցանկացած x-ի համար $A(x) < 0$:

Նման կերպ դատելով՝ կստանանք, որ $A(x) > 0$, եթե $x \in (x_1; x_2)$ և $A(x) < 0$, եթե $x \in (-\infty; x_1)$:

Այս դատողության վրա է հիմնված (1) և (2) անհավասարումների լուծման ***միջակայքերի եղանակը,*** որը կայանում է հետևյալում. Ox առանցքի վրա նշում են x_1, x_2, x_3 կետերը, $(x_3; +\infty)$ միջակայքի վրա դնում են «+» նշանը, (x_2, x_3) միջանցքի վրա՝ «−» նշանը, (x_1, x_2) միջակայքի վրա՝ «+» նշանը, $(-\infty; x_1)$ միջակայքի վրա՝ «−» նշանը (նկ. 27):



Նկ. 27

Այդ դեպքում (1) անհավասարման բոլոր լուծումների բազմությունը բաղկացած է բոլոր այն միջակայքերից, որոնց վրա դրված է «պլյուս» նշանը, իսկ (2) անհավասարման բոլոր լուծումների բազմությունը բաղկացած է բոլոր այն միջակայքերից, որոնց վրա դրված է «մինուս» նշանը:

Նշենք, որ x_1, x_2, x_3 թվերը $A(x) > 0$ և $A(x) < 0$ անհավասարումների լուծումներ չեն: Դրանով է բացատրվում, որ այդ անհավասարումների լուծումները բաց միջակայքեր են և ոչ թե հատվածներ կամ կիսաբաց միջակայքեր:

Նման կերպ կարելի է լուծել

$$(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) > 0$$

և

$$(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) < 0$$

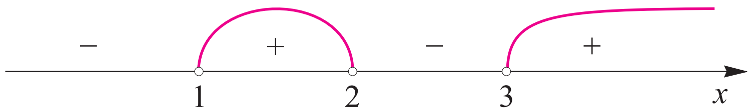
անհավասարումները, որտեղ $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, իսկ n-ը տված բնական թիվ է: Նշենք, որ փաստորեն հենց այդ մեթոդով էինք լուծում դրական տարբերիչով երկրորդ աստիճանի անհավասարումները:

ՕՐԻՆԱԿ 1. Լուծենք

$$(x - 1)(x - 2)(x - 3) > 0 \qquad (4)$$

անհավասարումը:

(4) անհավասարումը լուծենք միջակայքերի եղանակով: Ox առանցքի վրա նշենք 1, 2 և 3 կետերը: $(-\infty; 1)$, $(1; 2)$, $(2; 3)$, $(3; +\infty)$ միջակայքերի վրա աջից ձախ մեկընդմեջ հերթով դնենք «պլյուս» և «մինուս» նշանները (նկ. 28)՝ սկսելով «պլյուսից»:



Նկ. 28

Նկարից երևում է, որ (4) անհավասարման բոլոր լուծումների բազմությունները բաղկացած են (1; 2) և (3; +∞) երկու միջակայքերից (նկարում դրանք նշված են աղեղներով):

Պատասխան՝ (1; 2)∪(3; +∞):

ՕՐԻՆԱԿ 2. Լուծենք

$$(2 - x)(x^2 - 4x + 3)(x + 1) > 0 \qquad (5)$$

անհավասարումը:

$x^2 - 4x + 3$ քառակուսային եռանդամը վերլուծելով արտադրիչների՝

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3),$$

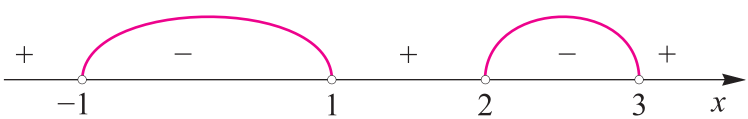
կստանանք, որ (5) անհավասարումը կարելի է գրել

$$(x - (-1))(2 - x)(x - 1)(x - 3) > 0 \qquad (6)$$

տեսքով: Բազմապատկելով (6) անհավասարումը −1-ով՝ կստանանք, որ այն համարժեք է

$$(x - (-1))(x - 2)(x - 1)(x - 3) < 0 \qquad (7)$$

անհավասարմանը: Ուստի, մնում է լուծել (7) անհավասարումը: Իսկ այն արդեն գրված է միջակայքերի եղանակի համար անհրաժեշտ տեսքով: Ox առանցքի վրա նշենք −1, 1, 2 և 3 կետերը (նկ. 29).



Նկ. 29

Կիրառելով միջակայքերի եղանակը՝ գտնում ենք, որ (5) անհավասարման բոլոր լուծումների բազմությունը բաղկացած է երկու միջակայքերից՝ (−1; 1) և (2; 3):

Պատասխան՝ (−1; 1)∪(2; 3):

ՕՐԻՆԱԿ 3. Լուծենք
$$(x-1)^3(x-2)^2(x-3)^4(x-4) < 0 \quad (8)$$
անհավասարումը:

(8) անհավասարումը նախորդ օրինակի անհավասարման նման չի կարելի լուծել, որովհետև դրա ձախ մասում ոչ բոլոր երկանդամներն են գրված առաջին աստիճանով: Այդպիսի անհավասարումների լուծման համար սովորաբար կիրառվում է ***միջակայքերի ընդհանուր եղանակը,*** որը կայանում է հետևյալում. Ox առանցքի վրա նշենք 1, 2, 3, 4 կետերը և այնուհետև

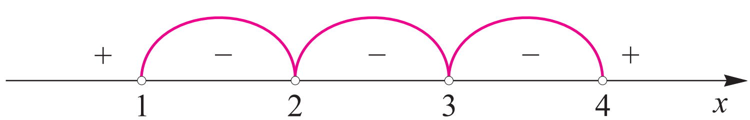
$$(-\infty;\, 1),\ (1;\, 2),\ (2;\, 3),\ (3;\, 4),\ (4;\, +\infty) \quad (9)$$

միջակայքերից յուրաքանչյուրում հետազոտենք
$$A(x) = (x-1)^3(x-2)^2(x-3)^4(x-4) \quad (10)$$
բազմանդամի նշանը:

A(x) բազմանդամի ամենամեծ արմատից աջ ընկած միջակայքի վրա դնում են «պլյուս» նշան, քանի որ այդ միջակայքում բոլոր արտադրիչները դրական են: Այնուհետև, շարժվելով աջից ձախ, հերթական արմատի վրայով անցնելիս նշանը փոխում են, եթե այդ արմատին համապատասխանող երկանդամը գրված է կենտ աստիճանով, և պահպանում են նշանը, եթե այն բարձրացված է զույգ աստիճանով, քանի որ երկանդամի և նրա կենտ աստիճանի նշանները համընկնում են, իսկ երկանդամի զույգ աստիճանը միշտ դրական է, բացի այդ երկանդամի արմատ հանդիսացող կետից:

Յուրաքանչյուր միջակայքի վրա դնում են գտնված «պլյուս» կամ «մինուս» նշանը: Այդ դեպքում (8) անհավասարման բոլոր լուծումների բազմությունը բաղկացած կլինի բոլոր այն միջակայքերից, որոնց վրա դրված է «մինուս» նշանը:

Հետազոտենք (10) բազմանդամի նշանները (9) միջակայքերից յուրաքանչյուրում: Այդ միջակայքերի վրա պետք է դրված լինեն նկ. 30-ում նշված նշանները,



Նկ. 30

քանի որ $x > 4$ դեպքում բոլոր արտադրիչները դրական են: 4 կետում արտադրյալը փոխում է նշանը, քանի որ ($x - 4$) տարբերությունը բարձրացված է կենտ աստիճանով (1 աստիճան): 3 և 2 կետերում արտադրյալը նշանը չի փոխում, քանի որ ($x - 3$) և ($x - 2$) տարբերությունները բարձրացված են զույգ աստիճաններով (4 և 2), 1 կետում արտադրյալը փոխում է նշանը, որովհետև $x-1$-ը բարձրացված է 3 կենտ աստիճանով: Ուստի, (8) անհավասարման բոլոր լուծումների բազմությունը բաղկացած է երեք միջակայքերից՝ (1; 2), (2; 3), (3; 4):

Պատասխան՝ (1; 2)∪(2; 3)∪(3; 4):

ՕՐԻՆԱԿ 4. Լուծենք

$$(4-3x-x^2)(x^2-4x+5)(x-1)<0 \qquad (11)$$

անհավասարումը:

Առաջին հերթին հետազոտենք (11) անհավասարման ձախ մասի քառակուսային եռանդամները: $4-3x-x^2$ քառակուսային եռանդամի տարբերիչը՝ $D=25>0$, ուստի. այն ունի երկու արմատ.

$$x_1=-4,\ x_2=1$$

և ճիշտ է

$$4-3x-x^2=-(x-1)(x+4) \qquad (12)$$

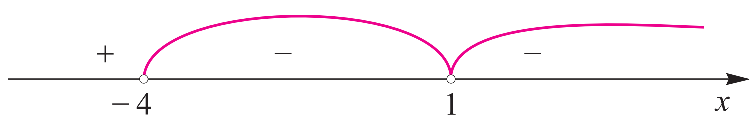
հավասարությունը:

x^2-4x+5 քառակուսային եռանդամի տարբերիչը՝ $D=-9<0$, ուստի, այդ եռանդամն արմատներ չունի և, ինչպես գիտենք, x-ի ցանկացած արժեքի համար ճիշտ է $x^2-4x+5>0$ անհավասարումը: Օգտագործելով (12) նույնությունը՝ (11) անհավասարումը գրենք

$$-(x^2-4x+5)(x+4)(x-1)^2<0 \qquad (13)$$

տեսքով:

Այս անհավասարումը կարելի է լուծել՝ նկատի ունենալով, որ x-ի ցանկացած արժեքի համար x^2-4x+5 արտադրիչը դրական է: Դրա համար Ox առանցքի վրա նշենք -4 և 1 կետերը և որոշենք (13) անհավասարման ձախ մասի նշանը ստացված միջակայքերից յուրաքանչյուրում (նկ. 31):



Նկ. 31

Կստանանք, որ (11) անհավասարման բոլոր լուծումների բազմությունը (–4; 1)∪(1; +∞) բազմությունն է:

Պատասխան՝ (–4; 1)∪(1; +∞):

154.° ա) Ո՞րն է անհավասարումների լուծման միջակայքերի եղանակը: Ի՞նչ տեսքի անհավասարումների համար է այն կիրառվում:
բ) Համարժե՞ք են արդյոք $x > 2$ և $x - 2 > 0$ անհավասարումները:
գ) Ճի՞շտ է արդյոք, որ եթե $x > 1$, ապա $x - 1 > 0$:
դ) Ճի՞շտ է արդյոք, որ եթե $x < 1$, ապա $x - 1 < 0$:

155. Եթե x թիվը կոորդինատային առանցքի վրա դասավորված է 5 թվից ձախ, ապա ճի՞շտ է արդյոք, որ
ա) $x - 5 < 0$; բ) $x - 5 > 0$:

156. Եթե x թիվը կոորդինատային առանցքի վրա գտնվում է -2 թվից աջ, ապա ճի՞շտ է արդյոք, որ
ա) $x - (-2) < 0$; բ) $x + 2 > 0$:

157. 1) Եթե x թիվը կոորդինատային առանցքի վրա դասավորված է 4 թվից ձախ, ապա ճի՞շտ է արդյոք, որ
ա) $x - 5 < 0$; բ) $x - 2 < 0$:
2) Եթե x թիվը կոորդինատային առանցքի վրա գտնվում է 10 թվից աջ, ապա ճի՞շտ է արդյոք, որ
ա) $x - 11 > 0$; բ) $x - 9 < 0$:

158. ա) Եթե x թիվը գտնվում է 1 և 3 թվերի միջև, ապա ի՞նչ նշաններ ունեն $x - 1$ և $x - 3$ երկանդամները:
բ) Եթե x թիվը գտնվում է -3 և -1 թվերի միջև, ապա ի՞նչ նշաններ ունեն $x + 3$ և $x + 1$ երկանդամները:

159. Տրված է $x - 6$ երկանդամը: x-ի ինչպիսի՞ արժեքների դեպքում է այդ երկանդամն ընդունում.
ա) զրոյի հավասար արժեք,
բ) դրական արժեքներ,
գ) բացասական արժեքներ:

160. ա) Եթե x թիվը գտնվում է 2 և 5 թվերի միջև, ապա ի՞նչ նշաններ ունեն $x - 2$ և $x - 5$ երկանդամները, և ի՞նչ նշան ունի $(x - 2)(x - 5)$ արտահայտությունը:
բ) Եթե x թիվը դասավորված է 7 թվից ձախ, ապա ի՞նչ նշաններ ունեն $x - 7$ և $x - 8$ երկանդամները և $(x - 7)(x - 8)$ արտահայտությունը:

161. Կոորդինատային առանցքի վրա նշված են 1, 2 և 3 թվերը: Որոշեք $x-1$, $x-2$, $x-3$ երկանդամներից յուրաքանչյուրի և $(x-1)(x-2)(x-3)$ արտահայտության նշանները $(-\infty; 1)$, $(1; 2)$; $(2; 3)$ և $(3; +\infty)$ միջակայքերում:

162. ա) Գտեք x-ի բոլոր այն արժեքները, որոնց դեպքում $(x-1)(x-3)(x-4)$ արտահայտությունն ընդունում է զրոյի հավասար արժեք:
բ) Որոշեք այն միջակայքերը, որոնցում $(x-1)(x-3)(x-4)$ արտահայտությունն ընդունում է դրական և բացասական արժեքներ:

Միջակայքերի եղանակով լուծեք անհավասարումները (163-169).

163. ա) $(x-1)(x-3)(x-5) > 0$; բ) $(x-1)(x-2)(x-4) < 0$;
գ) $(x+1)(x-1)(x-2) > 0$; դ) $(x+2)(x+1)(x-3) < 0$:

164. ա) $(x^2+x)(5x+5) < 0$; բ) $(3x+12)(2x+10)(x^2-2x) > 0$;
գ) $(6x^2-12x)(x+4) < 0$; դ) $(2x^2-16x)(4x+4)(7x-21) > 0$:

165. ա) $(2-x)(x+3)(x-7) < 0$; բ) $(5-x)(x-3)(x+12) > 0$;
գ) $(3x-4)(1-x)(2x+1) > 0$; դ) $(2x-5)(7x+3)(x+8) < 0$;
ե) $(5x-6)(6x-5)(1-x)(3x+1) > 0$;
զ) $(10x-1)(x+2)(7x-4)(7x+5) < 0$:

166. ա) $(x-3)(x^2-3x+2) > 0$;
բ) $(2-x)(x^2-x-12) < 0$;
գ) $(x^2-3x-4)(x^2+x-12) < 0$;
դ) $(x^2-5x-6)(x^2+2x-15) > 0$:

167. ա) $(x^2-16)(x^2-x-2)(x+2) > 0$;
բ) $(4+x)(9-x^2)(x^2-2x+1) > 0$:

168. ա) $(x-2)^2(x-1) > 0$; բ) $(x+4)(x+3)^2 < 0$;
գ) $(3x-1)^3(x+1) > 0$; դ) $(x+2)(5x+3)^2 < 0$:

169. ա) $(2-4x)(x^2-x-2) < 0$; բ) $(-4-3x)(x^2+3x-4) > 0$;
գ) $(3x-7)(x^2+2x+2) < 0$; դ) $(5x-8)(x^2-4x+5) > 0$;
ե) $(x^2+4x+5)(x^2-4x+3)(x-1) < 0$;
զ) $(-x^2+6x-10)(x^2-5x+6)(x-2) > 0$:

2.7 Ռացիոնալ անհավասարումների լուծումը

Դիցուք, տրված է $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ հանրահաշվական կոտորակը, որտեղ A (x)-ը և $B(x)$-ը x-ի նկատմամբ բազմանդամներ են:

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \qquad (1)$$

անհավասարումն անվանում են ռացիոնալ անհավասարում:

Հիշեցնենք, որ մեկ x անհայտով ***անհավասարման լուծում*** անվանում են այն x_0 թիվը, որն անհավասարման մեջ x-ի փոխարեն տեղադրելիս ստացվում է ճիշտ թվային անհավասարություն:

Լուծել (1) անհավասարումը նշանակում է գտնել նրա բոլոր լուծումները կամ ապացուցել, որ լուծումներ չկան:

Հեշտ է տեսնել, որ (1) անհավասարման ցանկացած լուծում անհավասար-

$$A(x) \cdot B(x) > 0 \qquad (2)$$

ման լուծում է:

Իրոք, եթե x_0-ն (1) անհավասարման լուծում է, ապա ճիշտ է

$$\frac{A(x_0)}{B(x_0)} > 0$$

թվային անհավասարությունը, որը նշանակում է, որ $A(x_0)$ և $B(x_0)$ թվերն ունեն նույն նշանը, այսինքն՝

$$A(x_0)\ B(x_0) > 0,$$

իսկ դա նշանակում է, որ x_0-ն (2) անհավասարման լուծում է: Նման ձևով ցույց է տրվում, որ (2) անհավասարման ցանկացած լուծում լուծում է նաև (1) անհավասարման համար: Հետևաբար (1) և (2) անհավասարումները համարժեք են:

Սկզբում կդիտարկենք միայն այն դեպքը, երբ $A(x)$ և $B(x)$ բազմանդամները վերլուծվում են $x - a$ տեսքի ***պարբեր երկանդամների*** արտադրյալով: Այդ դեպքում (2) անհավասարումը կարելի է լուծել միջակայքերի եղանակով:

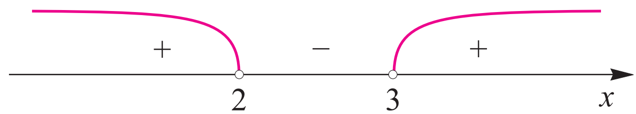
Դրա համար էլ սովորաբար (1) անհավասարման համար չեն կրկնում նախկինում բազմանդամների համար կատարված դատողությունները, այլ միանգամից (1) անհավասարման համար կիրառում են միջակայքերի եղանակը:

ՕՐԻՆԱԿ 1. Լուծենք

$$\frac{x-3}{x-2} > 0 \qquad (3)$$

անհավասարումը:

Կիրառելով միջակայքերի եղանակը (նկ. 32)՝ գտնում ենք, որ



Նկ. 32

(3) անհավասարման բոլոր լուծումների բազմությունը բաղկացած է երկու միջակայքերից՝ $(-\infty; 2)$ և $(3; +\infty)$:

Պատասխան՝ $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$:

Օրինակ 2. Լուծենք

$$\frac{x^2-2x-3}{x^2-3x+2}>0 \qquad (4)$$

անհավասարումը:

$$x^2-2x-3 \qquad (5)$$

և

$$x^2-3x+2 \qquad (6)$$

քառակուսային եռանդամները վերլուծենք գծային արտադրիչների:

(5) քառակուսային եռանդամն ունի երկու արմատ՝ $x_1=-1$ և $x_2=3$, և վերլուծվում է գծային արտադրիչների՝

$$x^2-2x-3=(x-(-1))(x-3):$$

(6) քառակուսային եռանդամն ունի $x_1=1$, $x_2=2$ արմատները և վերլուծվում է գծային արտադրիչների՝

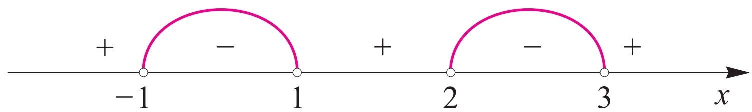
$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2):$$

Հետևաբար, (4) անհավասարումը կարելի է գրել

$$\frac{(x-(-1))(x-3)}{(x-1)(x-2)}<0$$

տեսքով: Կիրառելով միջակայքերի եղանակը (նկ. 33)՝ գտնում ենք, որ (4) անհավասարման բոլոր լուծումների բազմությունը բաղկացած է երկու միջակայքից՝ $(-1; 1)$ և $(2; 3)$:

Պատասխան՝ $(-1; 1) \cup (2; 3)$:



Նկ. 33

Դիցուք, տրված են $\dfrac{A_1(x)}{B_1(x)}$ և $\dfrac{A_2(x)}{B_2(x)}$ հանրահաշվական կոտորակները, որտեղ $A_1(x)$, $B_1(x)$, $A_2(x)$, $B_2(x)$-ը x-ի նկատմամբ բազմանդամներ են:

$$\frac{A_1(x)}{B_1(x)} > \frac{A_2(x)}{B_2(x)} \qquad (7)$$

անհավասարումը նույնպես անվանում են ռացիոնալ անհավասարում: Այն լուծելու համար անհրաժեշտ է բոլոր անդամները տեղափոխել ձախ կողմ, կատարել կոտորակների հանում և առանց կրճատելու կոտորակի համարիչն ու հայտարարը՝ (7) անհավասարումը բերել

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \qquad (8)$$

տեսքի, որտեղ $A(x)$-ն ու $B(x)$-ը x-ի նկատմամբ բազմանդամներ են, և այնուհետև լուծել (8) անհավասարումը: Քանի որ (7) և (8) անհավասարումները համարժեք են, ապա (8) անհավասարման բոլոր լուծումները կլինեն (7) անհավասարման բոլոր լուծումները:

Օրինակ 3. Լուծենք

$$\frac{x}{2x+3} > \frac{1}{x} \qquad (9)$$

անհավասարումը:

Տեղափոխելով $\dfrac{1}{x}$ կոտորակն անհավասարման ձախ կողմը՝ կստանանք դրան համարժեք

$$\frac{x}{2x+3} - \frac{1}{x} > 0 \qquad (10)$$

անհավասարումը:

(10) անհավասարման ձախ կողմում կատարելով կոտորակների հանում՝ կստանանք դրան համարժեք

$$\frac{x^2-2x+3}{x(2x+3)} > 0 \qquad (11)$$

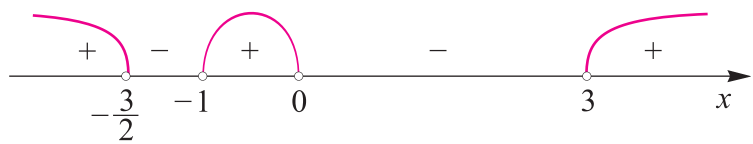
անհավասարումը: $x^2 - 2x - 3$ քառակուսային եռանդամը վերլուծելով գծային արտադրիչների՝ (11) անհավասարումն արտագրենք

$$\frac{(x+1)(x-3)}{2(x-0)\left(x+\frac{3}{2}\right)} > 0 \qquad (12)$$

տեսքով:

(12) անհավասարման համար կիրառելով միջակայքերի եղանակը՝ կստանանք, որ բոլոր լուծումների բազմությունը բաղկացած է $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$, $(-1; 0)$, $(3; +\infty)$ միջակայքերի միավորումից (նկ. 34):

Պատասխան՝ $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup (-1; 0) \cup (3; +\infty)$:



Նկ. 34

170.° Ո՞ր անհավասարումներն են անվանում համարժեք:

171. Համարժե՞ք են արդյոք անհավասարումները.

ա) $3x > 0$ և $\frac{3}{x} > 0$; բ) $-5x > 0$ և $\frac{5}{x} < 0$;

գ) $\frac{x+1}{x+2} < 0$ և $(x+1)(x+2) < 0$:

Լուծեք անհավասարումը (172-185).

172. ա) $\frac{5}{x} > 0$; բ) $-\frac{3}{x} < 0$; գ) $\frac{1}{x-1} < 0$; դ) $\frac{1}{2x+1} > 0$:

173. ա) $\frac{x-1}{x-2} > 0$; բ) $\frac{x-4}{x-2} < 0$; գ) $\frac{x+3}{x-5} < 0$; դ) $\frac{x-7}{x+8} > 0$;

174. ա) $\frac{x-6}{2-x} > 0$; բ) $\frac{4-x}{x-9} < 0$; գ) $\frac{2x+4}{4x+2} < 0$; դ) $\frac{3x+6}{9x-3} > 0$;

175. ա) $\frac{2x+3}{x-4}<0$; բ) $\frac{7+x}{4x-3}<0$; գ) $\frac{12x-6}{5x-4}<0$; դ) $\frac{7x-1}{2x+5}>0$;

176. ա) $\frac{(x-1)(x+2)}{x-3}>0$; բ) $\frac{(x+1)(x-2)}{x+3}<0$;

գ) $\frac{(x+1)(7-x)}{(8+x)(x-5)}<0$; դ) $\frac{(x-6)(4-x)}{(x-1)(1+x)}>0$:

177.* ա) $\frac{4x^2-x}{x+1}>0$; բ) $\frac{3x-x^2}{x-2}<0$;

գ) $\frac{13x-2x^2}{4x-x^2}<0$; դ) $\frac{15x-5x^2}{12x-3x^2}>0$:

178.* ա) $\frac{x^2-1}{x+4}>0$; բ) $\frac{x^2-4}{x-3}<0$;

գ) $\frac{x^2-4x+4}{x-1}<0$; դ) $\frac{7+x}{x^2-6x+9}>0$:

179.* ա) $\frac{x^2-x-2}{x^2-9}>0$; բ) $\frac{16-x^2}{x^2-5x-6}<0$;

գ) $\frac{x^2-7x+6}{(3x^2-12)(x-1)}<0$; դ) $\frac{25x^2-1}{5x^2-26x+5}<0$:

180.* ա) $\frac{x^2-x+2}{x^2-7x+6}<0$; բ) $\frac{x^2+4x-21}{x^2-2x+5}>0$;

գ) $\frac{x^2-3}{7x^2+3x+2}>0$; դ) $\frac{4x^2+5x+3}{5-x^2}<0$:

181. ա) $\frac{1}{x}>0$; բ) $\frac{1}{x}<0$;

գ) $\frac{x+1}{x}>0$; դ) $\frac{x-1}{x}<0$:

182.* ա) $\frac{x}{x-1}<\frac{1}{x}$; բ) $\frac{3}{x}>\frac{5x}{3}$;

գ) $\frac{x+1}{x-1}<\frac{3}{x}$; դ) $\frac{2}{x}>\frac{x-2}{3-x}$:

183.* ա) $\dfrac{x^2-6x+4}{x-1}>0;$ բ) $\dfrac{x^2+6x+6}{x+2}<0;$

գ) $\dfrac{x^2-5}{2x^2-3x-2}<0;$ դ) $\dfrac{3-x^2}{3x^2-4x-1}>0$:

184.* ա) $\dfrac{(x-1)^2(x-2)}{(x-3)^2}>0;$ բ) $\dfrac{(x+1)^2(x-2)}{x+3}<0;$

գ) $\dfrac{(x-1)^3(x-2)}{(x-3)^2}>0;$ դ) $\dfrac{(x+1)(x-2)^3}{x+3}<0$:

185.* ա) $\dfrac{(x+1)^2(x-2)}{(x+3)^2}>0;$ բ) $\dfrac{(x-1)^2(x+2)^2}{x+3}<0;$

գ) $\dfrac{(x-1)^3(x-2)}{(x-3)^2}>0;$ դ) $\dfrac{(x+1)(x+2)^3}{x+3}<0;$

ե) $\dfrac{(x-1)^2(x-3)}{x+3}>0;$ զ) $\dfrac{(x-2)^2(x+4)}{x-4}<0$:

2.8 Ռացիոնալ անհավասարումների համակարգեր և համախմբեր

Եթե անհրաժեշտ է գտնել բոլոր այն x թվերը, որոնցից յուրաքանչյուրը միաժամանակ տրված բոլոր ռացիոնալ անհավասարումների լուծում է, ապա ասում են, որ պետք է լուծել մեկ անհայտով ռացիոնալ անհավասարումների համակարգը:

Ռացիոնալ անհավասարումների համակարգը լուծելու համար պետք է լուծել համակարգի յուրաքանչյուր անհավասարումը, այնուհետև գտնել ստացված լուծումների բազմությունների ընդհանուր մասը (հատումը). դա էլ հենց կլինի համակարգի բոլոր լուծումների բազմությունը:

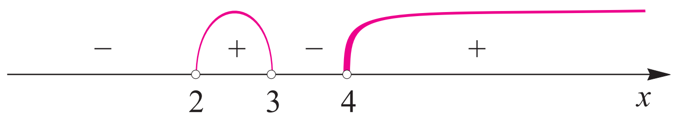
ՕՐԻՆԱԿ 1. Լուծենք

$$\begin{cases}(x-1)(x-5)(x-7)<0\\ \dfrac{(x-2)(x-3)}{x-4}>0\end{cases} \qquad (1)$$

անհավասարումների համակարգը:

Կիրառելով միջակայքերի եղանակը՝ գտնում ենք, որ (1) համակարգի առաջին անհավասարման բոլոր լուծումների բազմությունը բաղկացած է $(-\infty;\ 1)$ և $(5;\ 7)$ (նկ. 35. ա) միջակայքերից, իսկ (1) համակարգի երկրորդ անհավասարման բոլոր լուծումների բազմությունը բաղկացած է (2; 3) և (4; $+\infty$) միջակայքերից (նկ. 35. բ):

ա)

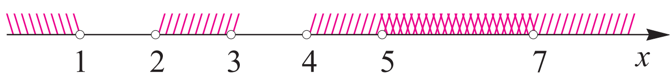


բ)

Նկ. 35

Ox կոորդինատային առանցքի վրա նշենք առաջին և երկրորդ բազմությունները (նկ. 36): Այդ բազմությունների ընդհանուր մասը (5, 7) միջակայքն է: Հետևաբար, (1) համակարգի բոլոր լուծումների բազմությունը բաղկացած է (5, 7) միջակայքից:

Պատասխան՝ (5, 7):



Նկ. 36

ՕՐԻՆԱԿ 2. Լուծենք անհավասարումների

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 10 < 0 \\ \dfrac{x^9 - x^3 + x + 2}{x^4 - x^2 + 1} > 0 \end{cases} \qquad (2)$$

համակարգը:

Կիրառելով լրիվ քառակուսի առանձնացնելու եղանակը՝ կարելի է գրել, որ

$$x^2 - 6x + 10 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 + 10 = (x - 3)^2 + 1:$$

Ուստի, (2) համակարգի առաջին անհավասարումը կարելի է գրել այսպես՝

$$(x - 3)^2 + 1 < 0,$$

որտեղից երևում է, որ այն լուծումներ չունի:

Հիմա արդեն համակարգի երկրորդ անհավասարումը կարելի է չլուծել, քանի որ պատասխանն արդեն պարզ է. (2) անհավասարումների համակարգը լուծումներ չունի:

Պատասխան՝ Լուծումներ չկան (կամ՝ ϕ):

Դիցուք, տրված են x անհայտով մի քանի ռացիոնալ անհավասարումներ: Եթե պահանջվում է գտնել բոլոր այն x թվերը, որոնցից յուրաքանչյուրը դրանցից գոնե մեկի լուծում է, ապա ասում են, որ պետք է լուծել մեկ x անհայտով համախումբը:

Լուծել համախումբը նշանակում է գտնել բոլոր լուծումները կամ ցույց տալ, որ լուծումներ չկան:

Ռացիոնալ անհավասարումների համախումբը լուծելու համար պետք է լուծել այդ համախմբի յուրաքանչյուր անհավասարումը և այնուհետև գտնել ստացված լուծումների բազմությունների միավորումը. դա էլ հենց կլինի տվյալ համախմբի բոլոր լուծումների բազմությունը:

ՕՐԻՆԱԿ 3. Լուծենք անհավասարումների

$$\left[\begin{aligned}&x^2-4x+3<0\\&(x-2)(x-5)>0\end{aligned}\right. \qquad (3)$$

համախումբը:

(3)-ի առաջին անհավասարման լուծումների բազմությունը (1; 3) միջակայքն է, իսկ երկրորդի լուծումների բազմությունը՝ $(-\infty;\ 2)\cup(5;\ +\infty)$-ը: Ուստի, (3) համախմբի լուծումների բազմությունն է.

$$(-\infty;\ 2)\cup(5;\ +\infty)\cup(1;\ 3)=(-\infty;\ 3)\cup(5;\ +\infty):$$

Պատասխան՝ $(-\infty;\ 3)\cup(5;\ +\infty)$:

186.° ա) Ի՞նչ է նշանակում լուծել ռացիոնալ անհավասարումների համակարգը:
բ) Ինչպե՞ս են լուծում ռացիոնալ անհավասարումների համակարգերը:

187.° ա) Ի՞նչ է նշանակում լուծել ռացիոնալ անհավասարումների համախումբը:
բ) Ինչպե՞ս են լուծում ռացիոնալ անհավասարումների համախումբը:

188. −1, 1, 0, 2 թվերից որևէ մեկն արդյոք անհավասարումների համակարգի լուծում է.

ա) $\begin{cases}(x-3)^2>0,\\(x-2)(x-5)<0;\end{cases}$ բ) $\begin{cases}(x+4)(x-4)>0,\\(x+5)^2>0;\end{cases}$

գ) $\begin{cases}x^2-3x+5>0,\\\dfrac{1}{x-4}<2;\end{cases}$ դ) $\begin{cases}\dfrac{x+4}{x}>5,\\x^2-6x-8<0:\end{cases}$

189. 2, –1, $\frac{1}{3}$, 4 թվերից որևէ մեկն արդյոք համախմբի լուծում է.

ա) $\left[\begin{array}{l} x^2 + 1 < 0, \\ 2x^2 - x > 0; \end{array}\right.$ բ) $\left[\begin{array}{l} \frac{4 - x}{2 - x^2} > 1, \\ 5x(x - 2) < 0; \end{array}\right.$ գ) $\left[\begin{array}{l} \frac{6}{x} < 0, \\ 7 - 2x^2 > 2x, \\ 4x < x^2; \end{array}\right.$

դ) $\left[\begin{array}{l} 3x^2 > 1, \\ (x - 3)^2 < 0, \\ \frac{4}{x^2} < -1; \end{array}\right.$ ե) $\left[\begin{array}{l} 6x > \frac{4}{x} - 1, \\ 2 < -x^2 - 3: \end{array}\right.$

Լուծեք անհավասարումների համակարգը (189-195).

190. ա) $\begin{cases} (x + 1)(x - 3) < 0, \\ (x + 2)(x + 1) < 0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x (x + 5) < 0, \\ (x - 1)(x - 4) < 0; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} (x + 2)(x - 1) > 0, \\ (x + 6)(x - 3) < 0; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} (x - 5)(x - 6) > 0, \\ (x + 3)(x - 4) < 0: \end{cases}$

191. ա) $\begin{cases} (x - 1)(x - 2) < 0, \\ x (x - 3) > 0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} (x + 10)(x - 13) > 0, \\ (x + 8)(x - 12) < 0; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} x^2 - 4 < 0, \\ x > 9; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} x < -2, \\ x^2 - 9 > 0: \end{cases}$

192. ա) $\begin{cases} (x - 1)(x - 2) > 0, \\ (x - 1)(x - 3) > 0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} (x + 3)(x + 2) < 0, \\ (x - 4)(x + 2) > 0; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} (x + 1)(x - 1) > 0, \\ (x + 1)(x - 3) < 0; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} (x + 4)(x - 6) > 0, \\ x^2 - 1 < 0: \end{cases}$

193. ա) $\begin{cases} (x - 5)(x + 1) > 0, \\ (x - 10)^2 > 0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} (x + 2)(x + 3) < 0, \\ (x + 2)^2 > 0; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0, \\ x^2 (x - 7)^2 > 0; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} (x^2 - 1)(x + 3) > 0, \\ (x + 5)^2(x - 1)^2 < 0: \end{cases}$

194. ա) $\begin{cases} (x - 2)(x - 3) > 0, \\ \frac{x + 2}{(x - 4)(x + 4)} > 0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} (x + 2)(x + 10) < 0, \\ \frac{x - 3}{(x + 4)(x + 7)} < 0; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} x^2 > 4, \\ \frac{x^2 - 9}{x^2 - 8x + 16} > 0; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} x^2 < 25, \\ \frac{x^2 - 16}{x^2 + 6x + 9} < 0: \end{cases}$

195. ա) $\begin{cases} \dfrac{x-5}{x+3} > 0, \\ \dfrac{x+7}{x-3} < 0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} \dfrac{x+3}{x-4} < 0, \\ \dfrac{x+8}{x-7} > 0; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x^2+4} > 0, \\ \dfrac{x-5}{x^2-4} < 0; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} \dfrac{x^2-16}{x^2+1} < 0, \\ \dfrac{x-2}{x^2-9} > 0: \end{cases}$

196.* ա) $\begin{cases} x^2-3|x|+2 > 0, \\ \dfrac{10}{x} > 0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x^2-5|x|+4 < 0, \\ \dfrac{11}{x} < 0; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} \dfrac{|x|-1}{|x|+2} > 0, \\ \dfrac{|x|-3}{|x|+4} < 0; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} \dfrac{|x|+1}{|x|-4} > 0, \\ \dfrac{|x|-5}{|x|+0,1} < 0: \end{cases}$

⌈Լուծեք անհավասարումների համախումբը (196-197).

197. ա) $\left[\begin{array}{l} x^2-49x+48 > 0, \\ x^2-x-6 > 0; \end{array}\right.$ բ) $\left[\begin{array}{l} x^2-4 < 0, \\ \dfrac{4}{x} > 0; \end{array}\right.$ գ) $\left[\begin{array}{l} 4x^2-2x > 0, \\ 11x-4 < 0; \end{array}\right.$

դ) $\left[\begin{array}{l} x^2+2x-8 > 0, \\ \dfrac{5}{x} < 12; \end{array}\right.$ ե) $\left[\begin{array}{l} x^2+1 < 0, \\ x^2+2x-24 > 0; \end{array}\right.$ զ) $\left[\begin{array}{l} x^2-9 > 0, \\ x^2+x-2 < 0: \end{array}\right.$

198. ա) $\left[\begin{array}{l} (x-1)(x-2)(x-3) < 0, \\ \dfrac{4x-x^2}{x+2} > 0, \end{array}\right.$ բ) $\left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{x-1} + 1, \\ \dfrac{2}{x^2} > 1, \\ 3x^3-2x^2-x > 0: \end{array}\right.$⌋

2.9 Ոչ խիստ ռացիոնալ անհավասարումներ

Դիտարկենք

$$\frac{A(x)}{B(x)} \geqslant 0 \qquad (1)$$

և

$$\frac{A(x)}{B(x)} \leqslant 0$$

ոչ խիստ անհավասարումների լուծումը, որտեղ $A(x)$-ը և $B(x)$-ը x-ի նկատմամբ բազմանդամներ են:

Եթե որևէ x_0 թիվ (1) անհավասարման լուծում է, ապա ճիշտ է

$$\frac{A(x_0)}{B(x_0)} \geqslant 0$$

թվային անհավասարությունը:

Այդ դեպքում, ըստ ոչ խիստ անհավասարության նշանի սահմանման, ճիշտ է կամ

$$\frac{A(x_0)}{B(x_0)} > 0$$

թվային անհավասարությունը, կամ

$$\frac{A(x_0)}{B(x_0)} = 0$$

թվային հավասարությունը:

Այլ կերպ ասած, եթե x_0-ն (1) անհավասարման լուծում է, ապա այն կամ

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \qquad (2)$$

անհավասարման լուծում է, կամ

$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0 \qquad (3)$$

հավասարման:

Նկատենք, որ (2) անհավասարման և (3) հավասարման ցանկացած լուծում (1) անհավասարման լուծումներ են:

Հետևաբար՝

$$\frac{A(x)}{B(x)} \geqslant 0$$

անհավասարման բոլոր լուծումների բազմությունը

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0$$

անհավասարման և

$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0$$

հավասարման բոլոր լուծումների բազմությունների միավորումն է:

Նկատենք, որ եթե $\frac{A(x)}{B(x)}$ հանրահաշվական կոտորակի $B(x)$ հայտարարը 1 թիվն է, ապա վերը բերված դատողությունները կիրառելի են նաև $A(x) \geqslant 0$ և $A(x) \leqslant 0$ անհավասարումների լուծման համար, որտեղ $A(x)$-ը x-ի նկատմամբ բազմանդամ է:

ՕՐԻՆԱԿ 1. Լուծենք

$$3x - 7 \geqslant 0 \qquad (4)$$

անհավասարումը:

Սկզբից լուծենք

$$3x - 7 = 0 \qquad (5)$$

հավասարումը:

Դրա միակ արմատը $x_0 = \frac{7}{3}$ թիվն է:

Այնուհետև լուծենք

$$3x - 7 > 0 \qquad (6)$$

անհավասարումը: (6) անհավասարման բոլոր լուծումների բազմությունը բոլոր $x > \frac{7}{3}$ թվերն են:

Միավորելով (6) անհավասարման և (5) հավասարման բոլոր լուծումների բազմությունները՝ կստանանք, որ (4) անհավասարման բոլոր լուծումների բազմությունը $\left[\frac{7}{3}; +\infty\right]$ միջակայքն է:

Պատասխան՝ $\left[\frac{7}{3}; +\infty\right]$:

ՕՐԻՆԱԿ 2. Լուծենք

$$2x^2 - x - 1 \leqslant 0 \qquad (7)$$

անհավասարումը:

Սկզբից լուծենք

$$2x^2 - x - 1 = 0 \qquad (8)$$

հավասարումը: Այն ունի երկու արմատ.

$$x_1 = -\frac{1}{2} \text{ և } x_2 = 1:$$

Այժմ լուծենք

$$2x^2 - x - 1 < 0 \qquad (9)$$

անհավասարումը: Քանի որ $2x^2 - x - 1$ քառակուսի եռանդամն ունի

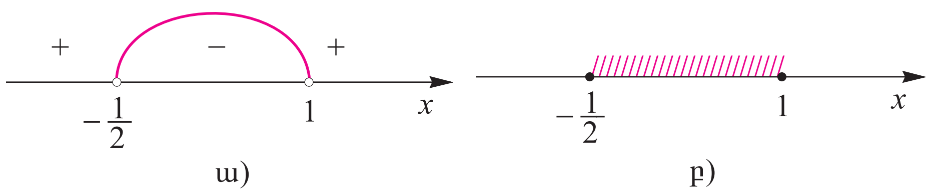
$$x_1 = -\frac{1}{2} \text{ և } x_2 = 1$$

արմատները, ապա (9) անհավասարումը կարելի է գրել

$$2\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)(x - 1) < 0$$

տեսքով: Լուծելով այն միջակայքերի եղանակով (նկ. 37. ա)՝ ստանում ենք, որ (9) անհավասարման բոլոր լուծումների բազմությունը $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$ միջակայքն է: Միավորելով (9) անհավասարման և (8) հավասարման բոլոր լուծումների բազմությունները՝ ստանում ենք, որ (7) անհավասարման բոլոր լուծումների բազմությունը $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ հատվածն է (նկ. 37. բ):

Պատասխան՝ $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$:



Նկ. 37

ՕՐԻՆԱԿ 3. Լուծենք

$$9x^2 - 6x + 1 \leqslant 0 \qquad (10)$$

անհավասարումը:

Սկզբից լուծենք

$$9x^2 - 6x + 1 = 0 \qquad (11)$$

հավասարումը, որն ունի մեկ արմատ՝ $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$:

Այժմ լուծենք

$$9x^2 - 6x + 1 < 0 \qquad (12)$$

անհավասարումը, որը կարելի է գրել

$$9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 < 0$$

տեսքով: Հետևաբար, գոյություն չունի այդ անհավասարմանը բավարարող որևէ x իրական թիվ (ցանկացած իրական թվի քառակուսին բացասական լինել չի կարող): Դրա համար էլ (12) անհավասարումը լուծումներ չունի:

Այսպիսով, (10) անհավասարումն ունի մեկ լուծում՝ $x = \frac{1}{3}$:

Պատասխան՝ $\frac{1}{3}$:

ՕՐԻՆԱԿ 4. Լուծենք

$$\frac{(x+2)(x-4)}{(x+3)x} \leqslant 0 \qquad (13)$$

անհավասարումը:

Սկզբից լուծենք

$$\frac{(x+2)(x-4)}{(x+3)x} = 0 \qquad (14)$$

հավասարումը:

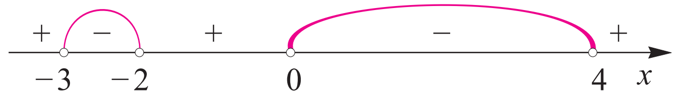
Հեշտ է տեսնել, որ այն ունի $x_1 = -2$ և $x_2 = 4$ արմատները և այլ արմատներ չունի:

Այժմ լուծենք

$$\frac{(x+2)(x-4)}{(x+3)x} < 0 \qquad (15)$$

անհավասարումը:

Կիրառելով միջակայքերի եղանակը (նկ. 38. ա)՝ կգտնենք, որ (15) անհավասարման բոլոր լուծումների բազմությունը $(-3, -2)$ և $(0, 4)$ երկու միջակայքերն են:



ա)

Միավորելով (14) հավասարման և (15) անհավասարման բոլոր լուծումնե-րի բազմությունները՝ կստանանք (13) անհավասարման բոլոր լուծումների բազմությունը՝ $(-3, -2]\cup(0; 4]$: (նկ. 38. բ):

Պատասխան՝ $(-3; -2]\cup(0; 4]$:

բ)

Նկ. 38

199.° Ինչպե՞ս են լուծում ոչ խիստ անհավասարումները:

Լուծեք անհավասարումները (200-206).

200. ա) $2x - 3 \leqslant 0$; բ) $4x - 3 \geqslant 0$;
գ) $5x - 8 \geqslant 3x - 1$; դ) $2x - 4 \leqslant 4x - 3$:

201. ա) $x^2 - 12x + 32 \leqslant 0$; բ) $x^2 + 8x + 12 \leqslant 0$;
գ) $2x^2 + x - 7 \geqslant 0$; դ) $3x^2 - 5x - 1 \leqslant 0$:

202. ա) $-2x + 2x - 1 \geqslant 0$; բ) $-x^2 + 4x - 4 \leqslant 0$;
գ) $3x^2 + 18x + 27 \leqslant 0$; դ) $2x^2 - 20x + 50 \geqslant 0$:

203. ա) $x^2 - 3x + 5 \geqslant 0$; բ) $x^2 + 7x + 10 \leqslant 0$;
գ) $8x^2 - x + 1 \leqslant 0$; դ) $4x^2 - 5x + 6 \geqslant 0$:

204. ա) $(x^2 - 1)(x + 3) \geqslant 0$; բ) $(7 - x)(4 - x^2) \leqslant 0$;
գ) $(12 - 5x)(x^2 - 4x + 4) \geqslant 0$; դ) $(x^2 - 5x + 6)(x - 3) \leqslant 0$:

205. ա) $\dfrac{1}{x-1} \geqslant 0$; բ) $\dfrac{5}{2-x} \leqslant 0$;
գ) $\dfrac{x-8}{2x+3} \geqslant 0$; դ) $\dfrac{3-4x}{5+x} \leqslant 0$:

206.* ա) $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-9} \geqslant 0$; բ) $\dfrac{x^2-7x+10}{25-x^2} \geqslant 0$;
գ) $1 - x \geqslant \dfrac{1}{x-3}$; դ) $\dfrac{5}{x} - 4 \leqslant \dfrac{2x+3}{x-1}$:

Լուծեք անհավասարումների համակարգը (207-209).

207. ա) $\begin{cases} (x-1)(x-2) \geqslant 0, \\ (x+1)(x-3) \leqslant 0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} (x+3)(x+2) \leqslant 0, \\ x\,(x-4) \leqslant 0; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} x^2-5x+6 \leqslant 0, \\ x^2+x-2 \geqslant 0; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} x^2+5x+6 \geqslant 0, \\ x^2-4x+3 \leqslant 0: \end{cases}$

208. ա) $\begin{cases} \dfrac{(x+2)(x-1)}{x+1} < 0, \\ x+3 \geqslant 0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} \dfrac{(x-2)(x+3)}{x-1} \geqslant 0, \\ x+2 > 0; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} \dfrac{x-3}{x^2-9} \leqslant 0, \\ \dfrac{x^2-4}{x+2} \geqslant 0; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{x^2-1} \geqslant 0, \\ \dfrac{x^2-16}{x-4} \geqslant 0: \end{cases}$

209.* ա) $\begin{cases} |x| < 2, \\ (x-3)(x-2) \geqslant 0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} |x| > 4, \\ (x+5)(x-4) \leqslant 0; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{2x^2-3x+1} \leqslant 0, \\ x^2-4 \leqslant 0; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} \dfrac{(x-3)^2}{3x^2-5x+2} \leqslant 0, \\ x\,(x-4) \leqslant 0; \end{cases}$

ե) $\begin{cases} (x+1)(x^2-x-6) \geqslant 0, \\ (x-1)(x^2-5x+6) \leqslant 0, \\ (x+3)(x^2-4) \geqslant 0; \end{cases}$ զ) $\begin{cases} (x+1)(x^2+8x+15) \leqslant 0, \\ (x+2)(x^2+10x+24) \geqslant 0, \\ (x+3)(x^2+9x+20) \geqslant 0: \end{cases}$

Լուծեք անհավասարումների համախումբը (210-211).

210. ա) $\left[\begin{array}{l} |x+2| \leqslant 4, \\ x^2-3x+2 > 0; \end{array} \right.$ բ) $\left[\begin{array}{l} |x^2-1| \leqslant 0, \\ (6+x)(2x-1) \geqslant 0; \end{array} \right.$

գ) $\left[\begin{array}{l} 4x-x^3 \geqslant 0, \\ 2x^2 > -x; \end{array} \right.$ դ) $\left[\begin{array}{l} \dfrac{3-x}{x} \geqslant \dfrac{3}{x} - 1, \\ x\,(x^2+1) \leqslant 0; \end{array} \right.$

211. ա) $\left[\begin{array}{l} 2x^3 - x \geqslant x \\ \dfrac{4}{x(x-1)(x-2)} < 0, \\ x^2+x+1 \leqslant 0; \end{array} \right.$ բ) $\left[\begin{array}{l} (2x-3)(2x^2-x-1) \leqslant 0, \\ 3x^2-2x > 1, \\ (x^2-x)(4x-x^2-3) \geqslant 0: \end{array} \right.$

Պատմական տեղեկություններ

Թվերի հավասարության և անհավասարության գաղափարները ծագել են հնագույն ժամանակներից: Այսպես՝ հավասարությունների և անհավասարությունների ապացուցման խնդիրները հանդիպում են անցյալի մեծ մաթեմատիկոսների մոտ, որոնք հավասարությունը և անհավասարությունը նշանակելու համար օգտագործում էին բառեր կամ հատուկ նշանակումներ, որոնք այդ բառերի կրճատ գրելաձևերն էին: Դեռևս մեր թվարկությունից 2000 տարի առաջ հայտնի էր

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \text{ որտեղ } a \geqslant 0,\ b \geqslant 0$$

անհավասարությունը: Այս անհավասարությունը վերածվում է ճիշտ հավասարության $a = b$ դեպքում:[1]

Հավասարության և անհավասարության ժամանակակից հատուկ նշանակումները կիրառվել են համեմատաբար ոչ վաղ ժամանակներում: Հավասարության = նշանը մտցրել է 1557թ. անգլիացի մաթեմատիկոս Ռ. Ռիկորդը: Նա պատճառաբանում էր այսպես. ոչ մի երկու առարկա չեն կարող իրար ավելի հավասար լինել, քան երկու զուգահեռ հատվածները: Անհավասարության > և < նշանները իր «Անալիտիկ արվեստի պրակտիկան» (1631թ.) գրքում մտցրել է անգլիացի գիտնական Հարրիոտը: Ոչ խիստ անհավասարության $\geqslant$ (ոչ փոքր) և $\leqslant$ (ոչ մեծ) նշանները մտցվել են 1734թ. ֆրանսիացի մաթեմատիկոս Պ. Բուգեյի կողմից:

Անհավասարությունների հետ առնչվող խնդիրներ հանդիպում են Էվկլիդեսի «Ակունքներ»-ի 5-րդ գրքում (մ.թ.ա. IV դար): Այնտեղ ապացուցված է, որ

եթե a, b, c և d-ն դրական թվեր են և $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ համեմատականության մեջ a-ն ամենամեծ թիվն է, ապա տեղի է ունենում $a + d > b + c$ անհավասարությունը: Պապ Ալեքսանդրիացու (III դ.) «Մաթեմատիկական ժողովածու» հիմնական աշխատության մեջ ապացուցվում է, որ եթե a, b, c և d-ն դրական թվեր են և $\dfrac{a}{b} > \dfrac{c}{d}$, ապա տեղի է ունենում $ad > bc$ անհավասարությունը:

[1] Այս անհավասարությունն արտահայտում է այն փաստը, որ երկու ոչ բացասական թվերի *միջին թվաբանականը* փոքր չէ *միջին երկրաչափականից*. դրա ապացույցն անմիջապես բխում է $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geqslant 0$ ակնհայտ անհավասարությունից (Ապացույցը շարունակեք ինքներդ):

ՌԱՑԻՈՆԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

3.1 Գաղափար ռացիոնալ հավասարման մասին

Հավասարումները, որոնց ձախ և աջ մասերը x-ի նկատմամբ ռացիոնալ արտահայտություններ են, անվանում են x անհայտով ռացիոնալ հավասարումներ:

ՕՐԻՆԱԿ՝

$$5x^6 - 9x^5 + 4x^2 - 3x + 1 = 0,$$

$$\frac{x^3 - 1}{x + 1} = 1 + x, \quad \frac{3x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \frac{5x^3 - 2}{x^4 + 3}$$

հավասարումները ռացիոնալ հավասարումներ են:

Հիշեցնենք, որ x ***անհայտով հավասարման արմատ (կամ լուծում) է այն թիվը, որը, հավասարման մեջ*** x***-ի փոխարեն տեղադրելով, ստացվում է ճիշտ թվային հավասարություն: Լուծել հավասարումը նշանակում է գտնել բոլոր արմատները կամ ցույց տալ, որ արմատներ չկան:***

Ռացիոնալ հավասարումներ լուծելիս հարկ է լինում հավասարման երկու մասերը բազմապատկել կամ բաժանել միևնույն զրոյից տարբեր թվով, հավասարման անդամները մի կողմից տեղափոխել մյուս կողմը, կիրառել հանրահաշվական կոտորակների գումարման և հանման կանոնները: Արդյունքում կստացվի նախորդին համարժեք հավասարում, այսինքն՝ հավասարում, որն ունի միայն և միայն նույն արմատները (կամ արմատներ չունի, եթե նախորդը արմատներ չուներ):

Այս պարագրաֆում դիտարկվելու են ռացիոնալ հավասարումների մի քանի տիպեր, որոնց լուծումը հանգում է առաջին և երկրորդ աստիճանի հավասարումների լուծմանը:

212.° ա) Ո՞ր հավասարումն են անվանում x անհայտով ռացիոնալ հավասարում:
բ) Ի՞նչն են անվանում x անհայտով հավասարման արմատ:
գ) Ի՞նչ է նշանակում լուծել հավասարումը:
դ) Ո՞ր հավասարումներն են անվանում համարժեք:

213.° Հավասարումն արդյոք ռացիոնալ է.

ա) $1 - 3x = 0$;
բ) $\frac{1}{2}x - (5 - x) \cdot 0{,}2 = 4x - \frac{1}{4}$;
գ) $3x^2 = 7$;
դ) $12 - \frac{x^2}{3} = (1 - x)\,x$;
ե) $\frac{x^5 - 6}{2} = 1 - \frac{x^3}{4}$;
զ) $\frac{3}{x} + 5 = 3 - \frac{7}{x + 13}$;
է) $\sqrt{x} = 2$;
ը) $\sqrt{x - 8} = 24$;
թ) $\sqrt{7}\,x + 8 = \sqrt{12\frac{1}{3}}$;
ժ) $\frac{x}{\sqrt{3}} - 2x^2 = 14$:

214. Արդյոք նշված թիվը հավասարման արմատ է.

ա) 2; $3x - \frac{x - 5}{3} = x + 5$;
բ) –0,1; $3\,(x - 8) = 4 - 2\,(x - 1)$;
գ) 3; $x^2 + 4x - 28 = 0$;
դ) $\frac{1}{4}$; $\frac{x^2 - x}{x - 3} - 1 = \frac{13 + 2x}{10}$;
ե) –2; $\frac{3x^2 - x^3}{5} = 6 + 2\,(x + 1)$;
զ) –10; $x^5 + 3x^4 = 7x^3 + 7700$;
է) 1; $\frac{x^2 + x}{x - 1} = \frac{x + 1}{x - 1}$;
ը) –1; $\frac{x^2 + 1}{x + 1} = \frac{2}{x + 1}$:

215. Համարժե՞ք են արդյոք հավասարումները.

ա) $x + 2 = 3$ և $x + 5 = 6$;
բ) $12x = 7$ և $1{,}2x = 0{,}7$;
գ) $2x = 4$ և $24x - 7 = 41$;
դ) $x - 1 = 3$ և $\frac{x^2 - x}{5} = \frac{3x}{5}$;
ե) $3x - 1 + 5x = x - 12$ և $7x = -11$;
զ) $1\frac{1}{3}x^2 - x + 8 = 0$ և $x^2 - 0{,}75x + 6 = 0$:

3.2 Երկքառակուսային հավասարումներ

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \qquad (1)$$

տեսքի հավասարումը, որտեղ** a, b **և** c**-ն տրված թվերն են,** և a**-ն զրոյից տարբեր է, իսկ** x**-ը անհայտն է, անվանում են երկքառակուսային հավասարումներ:

(1) հավասարումը լուծելու համար ներմուծում են նոր փոփոխական՝

$$y = x^2 \qquad (2)$$

հավասարման օգնությամբ: Այդ դեպքում (1) հավասարումը դառնում է

$$ay^2 + by + c = 0 \qquad (3)$$

քառակուսային հավասարում y անհայտի նկատմամբ:

Եթե (3) հավասարումն արմատներ չունի, ապա այդ դեպքում, ակնհայտ է, որ (1) հավասարումը նույնպես արմատներ չունի:

Իսկ եթե (3) հավասարումն արմատներ ունի, ապա դրանք, տեղադրելով (2) հավասարման մեջ y-ի փոխարեն, կստանանք x-ի նկատմամբ հավասարումներ: Ստացված հավասարումների լուծումները, եթե դրանք գոյություն ունեն, կլինեն (1) հավասարման լուծումներ: Ակնհայտ է՝ (1) հավասարումն այլ լուծումներ չունի:

ՕՐԻՆԱԿ 1. Լուծենք

$$x^4 - 4x^2 + 3 = 0 \qquad (4)$$

հավասարումը:

$$y = x^2$$

նշանակումից հետո (4) հավասարումը դառնում է

$$y^2 - 4y + 3 = 0$$

քառակուսային հավասարում (հաշվի առնելով, որ $x^4 = (x^2)^2 = y^2$):

Քանի որ $\dfrac{D}{4} = \left(\dfrac{p}{2}\right)^2 - q = 4 - 3 > 0$, ապա այն ունի երկու արմատ՝

$$y_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{D}{4}} = 2 \pm 1, \text{ այսինքն՝ } y_1 = 1,\ y_2 = 3:$$

Տեղադրելով այս թվերը $y = x^2$ հավասարման մեջ y-ի փոխարեն՝ կստանանք x-ի նկատմամբ

$$1 = x^2 \text{ և } 3 = x^2$$

հավասարումները: Լուծելով դրանք՝ կստանանք (4) հավասարման չորս արմատները.

$$x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = \sqrt{3},\ x_4 = -\sqrt{3}:$$

Ակնհայտ է, որ (4) հավասարումն այլ արմատներ չունի:

ՕՐԻՆԱԿ 2. Լուծենք

$$x^4 - 2x^2 - 2 = 0 \qquad (5)$$

հավասարումը:

(5) հավասարումը $y = x^2$ նշանակումից հետո վերածվում է

$$y^2 - 2y - 2 = 0$$

քառակուսային հավասարման:

Քանի որ

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 3 > 0,$$

ապա այն ունի երկու արմատ, որոնք որոշվում են $y_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$ բանաձևով, այսինքն՝ $y_1 = 1 + \sqrt{3}$, $y_2 = 1 - \sqrt{3}$:

$y = x^2$ հավասարման մեջ y-ի փոխարեն տեղադրելով y_1-ը՝ կստանանք $1 + \sqrt{3} = x^2$ հավասարումը, որտեղից ստանում ենք (5) հավասարման երկու արմատները.

$$x_1 = \sqrt{1 + \sqrt{3}}, \ \ x_2 = -\sqrt{1 + \sqrt{3}}:$$

$y = x^2$ հավասարման մեջ y-ի փոխարեն տեղադրելով y_2-ը՝ կստանանք

$$1 - \sqrt{3} = x^2$$

հավասարումը, որն արմատներ չունի, քանի որ $1 - \sqrt{3} < 0$:

Այսպիսով, (5) հավասարումն ունի երկու վերը գտնված x_1 և x_2 արմատները և այլ արմատներ չունի:

ՕՐԻՆԱԿ 3. Լուծենք

$$2x^4 - 3x^2 + 5 = 0 \qquad (6)$$

հավասարումը:

$y = x^2$ փոխարինումից հետո (6) հավասարումը վերածվում է

$$2y^2 - 3y + 5 = 0$$

քառակուսային հավասարման:

Նրա տարբերիչը՝ $D = b^2 - 4ac = 9 - 40 = -31 < 0$, և հետևաբար՝ այն արմատներ չունի: Բայց այդ դեպքում (6) հավասարումը նույնպես արմատներ չունի:

ՕՐԻՆԱԿ 4. Լուծենք

$$9x^4 - 6x^2 + 1 = 0 \qquad (7)$$

հավասարումը:

(7) հավասարումը $y = x^2$ փոխարինումից հետո վերածվում է

$$9y^2 - 6y + 1 = 0$$

քառակուսային հավասարման, որի դիսկրիմինանտը՝

$$D = b^2 - 4ac = 36 - 36 = 0:$$

Այն ունի մեկ արմատ.

$$y_0 = \frac{6 \pm 0}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}:$$

Լուծելով $\frac{1}{3} = x^2$ հավասարումը, կստանանք (7) հավասարման երկու արմատ.

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}},\ x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}:$$

Այլ արմատներ (7) հավասարումը չունի:

ՕՐԻՆԱԿ 5. Լուծենք

$$x^4 + 10x^2 + 25 = 0 \qquad (8)$$

հավասարումը:

(8) հավասարումը $y = x^2$ նշանակումից հետո վերածվում է

$$y^2 + 10y + 25 = 0$$

քառակուսային հավասարման, որի համար

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 25 - 25 = 0:$$

Այսպիսով, այն ունի մեկ՝ $y_0 = -5 \pm 0 = -5$ արմատ:

Տեղադրելով y_0-ն y-ի փոխարեն $y = x^2$ հավասարման մեջ՝ կստանանք

$$x^2 = -5$$

հավասարումը, որն արմատներ չունի: Դա նշանակում է, որ (8) հավասարումը նույնպես արմատներ չունի:

Նշենք, որ $x^4 = 0$ հավասարումն ունի մեկ արմատ՝ $x_0 = 0$, իսկ $x^4 - x^2 = 0$ հավասարումն ունի երեք արմատ՝ $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$:

Դիտողություն: Քննարկվող օրինակներից երևում է, որ երկքառակուսային հավասարումը կարող է ունենալ չորս, երեք, երկու կամ մեկ արմատ, բայց կարող է նաև արմատներ չունենալ:

216.° ա) Ո՞ր հավասարումն են անվանում երկքառակուսային հավասարում:
Ինչպե՞ս են լուծվում երկքառակուսային հավասարումները:
բ) Քանի՞ արմատ կարող է ունենալ երկքառակուսային հավասարումը:

217. Արտահայտությունը ներկայացրեք քառակուսու տեսքով.
ա) x^4, բ) a^6, գ) y^8, դ) m^{10}:

218. Ինչպիսի՞ նշանակում պետք է կատարել, որպեսզի հավասարումը վերածվի քառակուսի հավասարման.
ա) $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$;
բ) $m^4 - 3 + 2m^2 = 0$;
գ) $4y^2 - 7y^4 = 0$;
դ) $15 - x^4 + 2x^2 = 0$;
ե) $x^6 - 3x^3 + 2 = 0$;
զ) $y^8 - 4 = 0$:

Լուծեք հավասարումը (219-221).

219. ա) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$;
բ) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$;
գ) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$;
դ) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$;
ե) $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$;
զ) $x^4 + 20x^2 + 64 = 0$;
է) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$;
ը) $x^4 - 41x^2 + 100 = 0$;
թ) $3x^4 - 5x^2 + 2 = 0$;
ժ) $25x^4 - 25x^2 + 6 = 0$:

220. ա) $a^4 + 2a^2 - 8 = 0$;
բ) $y^4 + 9y^2 = 400$;
գ) $k^4 = 12k^2 + 64$;
դ) $m^4 = 21m^2 + 100$;
ե) $n^4 - 2n^2 + 1 = 0$;
զ) $9x^4 - 24x^2 + 16 = 0$;
է) $6c^4 - 35 = 11c^2$;
ը) $10p^4 - 21 = p^2$:

221. ա) $x^4 + 6x^2 + 9 = 0$;
բ) $x^4 - 14x^2 - 15 = 0$;
գ) $25x^4 + 30x^2 + 9 = 0$;
դ) $7x^4 - 9x^2 + 3 = 0$;
ե) $9x^4 = 9x^2 - 1$;
զ) $x^4 = 30x^2 - 36$;
է) $4x^4 = 5x^2 + 6$;
ը) $x^4 - x^2 - 4 = 0$;
թ) $3 - 2x^4 = 11x^2$;
ժ) $3x^4 + 21 = 4x^2$;
ի) $x^4 - 1 = 0$;
լ) $x^4 + 1 = 0$;
խ) $x^8 + 16 = 0$;
ծ) $x^8 - 16 = 0$:

3.3 Վերածվող հավասարումներ

ՕՐԻՆԱԿ 1. Լուծենք

$$(x^2 - 5x + 6)(x^2 + x - 2) = 0 \qquad (1)$$

հավասարումը:

Եթե x_0-ն (1) հավասարման արմատ է, ապա (1) հավասարման մեջ x-ի փոխարեն տեղադրելով x_0՝ կստանանք ճիշտ թվային հավասարություն.

$$(x_0^2 - 5x_0 + 6)(x_0^2 + x_0 - 2) = 0: \qquad (2)$$

Բայց երկու թվերի արտադրյալը զրո է այն և միայն այն դեպքում, երբ արտադրիչներից գոնե մեկը հավասար է զրոյի, իսկ մյուսն իմաստ ունի: Ուստի (2) հավասարությունից հետևում է, որ x_0-ն

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \qquad (3)$$

կամ

$$x^2 + x - 2 = 0 \qquad (4)$$

հավասարումներից գոնե մեկի արմատն է:

Մյուս կողմից՝ (3) և (4) հավասարումներից յուրաքանչյուրի ցանկացած արմատ (1) հավասարման արմատ է:

Այսպիսով, (1) հավասարման բոլոր արմատների բազմությունները բաղկացած են (3) և (4) հավասարումների բոլոր արմատների բազմությունների միավորումից (այստեղ հաշվի առանք նաև այն փաստը, որ $x^2 - 5x + 6$ և $x^2 + x - 2$ արտահայտություններն իմաստ ունեն x-ի ցանկացած թվային արժեքի համար):

(3) հավասարման արմատներն են՝ $x_1 = 2$ և $x_2 = 3$, իսկ (4) հավասարմանը՝ $x_3 = -2$ և $x_4 = 1$: Հետևաբար, (1) հավասարումն ունի $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -2$, $x_4 = 1$ արմատները և այլ արմատներ չունի:

$A(x) \cdot B(x) = 0$ ***տեսքի հավասարումը, որտեղ*** $A(x)$-ը և $B(x)$-***ը*** x-***ի նկատմամբ բազմանդամներ են, անվանում են վերածվող հավասարում: Վերածվող հավասարման բոլոր արմատների բազմությունները*** $A(x) = 0$ ***և*** $B(x) = 0$ ***հավասարումների բոլոր լուծումների բազմությունների միավորումն են:***

Այսպիսով, (1) հավասարումը վերածվում է (3) և (4) հավասարումների համախմբի:

ՕՐԻՆԱԿ 2. Լուծենք

$$x^3 - 1 = 0 \qquad (5)$$

հավասարումը:

(5) հավասարման ձախ մասը վերլուծենք արտադրիչների՝ օգտվելով խորանարդների տարբերության բանաձևից՝

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

(5) հավասարումը վերածվում է երկու հավասարումների.

$$x - 1 = 0 \tag{6}$$

և

$$x^2 + x + 1 = 0: \tag{7}$$

(6) հավասարումն ունի $x_1 = 1$ միակ արմատը, իսկ (7)-ը արմատներ չունի: Հետևաբար, (5) հավասարումն ունի մեկ՝ $x_1 = 1$ արմատը:

ՕՐԻՆԱԿ 3. Լուծենք

$$x^6 - 1 = 0 \tag{8}$$

հավասարումը:

Հավասարման ձախ մասը վերլուծենք արտադրիչների.

$$x^6 - 1 = (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^4 + x^2 + 1):$$

(8) հավասարումը համարժեք է

$$(x - 1)(x + 1)(x^4 + x^2 + 1) = 0$$

հավասարմանը, որը վերածվում է երեք հավասարումների.

$$x - 1 = 0 \tag{9}$$

$$x + 1 = 0 \tag{10}$$

և

$$x^4 + x^2 + 1 = 0: \tag{11}$$

(9) և (10) հավասարումները համապատասխանաբար ունեն $x_1 = 1$ և $x_2 = -1$ արմատները, իսկ (11)-ը՝ արմատներ չունի: Իրոք, (11) հավասարումը երկքառակուսային է: $y = x^2$ նշանակումով այն բերվում է

$$y^2 + y + 1 = 0$$

քառակուսային հավասարման, որն արմատներ չունի, որովհետև

$$\mathrm{D} = b^2 - 4ac = -3 < 0:$$

Նշանակում է՝ (8) հավասարումն ունի երկու արմատ՝ $x_1 = 1$ և $x_2 = -1$:

ՕՐԻՆԱԿ 4. Լուծենք

$$x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \tag{12}$$

հավասարումը:

Քանի որ $x^3 - 2x^2 - 3x = x(x^2 - 2x - 3)$, ապա (12) հավասարումը վերածվում է երկու հավասարման.

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \text{ և } x = 0:$$

Դրանցից առաջինն ունի երկու արմատ՝ $x_1 = -1$ և $x_2 = 3$, ուստի, (12) հավասարումն ունի երեք արմատ՝ $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$:

222.° ա) Բերեք վերածվող հավասարման օրինակ և բացատրեք՝ ինչպես այն լուծել:
բ) Ի՞նչ է նշանակում «հավասարումը վերածվում է երկու հավասարման»:

223.° ա) a-ի և b-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում է տեղի ունենում $ab = 0$ հավասարումը:
բ) Ճի՞շտ է արդյոք, որ եթե $ab = 0$, ապա $a = 0$:
գ) Համարժե՞ք են արդյոք $x^2 - x = 0$ և $x - 1 = 0$ հավասարումները:
դ) Արդյոք 0 թիվը $3x^4 - x^3 + 5x^2 = 0$ հավասարման արմատ է:

224.° Լուծեք հավասարումը.

ա) $(x - 1)(x - 2) = 0$; բ) $(x - 3)(x + 4) = 0$;
գ) $(x - 7)^2 = 0$; դ) $(x + 4)(x - 6) = 0$;
ե) $x\,(x - 2) = 0$; զ) $(x + 3)\,x = 0$;
է) $3x^2 = 0$; ը) $-x^2\,(3 + x) = 0$:

225. Հավասարման ձախ մասը ներկայացրեք արտադրյալի տեսքով և լուծեք հավասարումը.

ա) $2x^2 - 3x = 0$; բ) $7x^2 + 5x = 0$; գ) $x^3 - x = 0$;
գ) $x^2 + x^3 = 0$; դ) $1 - x^3 = 0$; ե) $1 + x^3 = 0$;
զ) $x^3 - 8 = 0$; է) $125 - x^3 = 0$; ը) $x^4 - 1 = 0$:

Լուծեք հավասարումը (226-227).

226. ա) $x^3 + 5x^2 + 6x = 0$; բ) $x^3 - 4x^2 + 3x = 0$;
գ) $x^4 = 2x^3 + 3x^2$; դ) $10x^2 = x^4 + 3x^3$;
ե) $x^3 - 4x^2 = x$; զ) $x^3 + x = 2x^2$;
է) $x^5 + x^3 = x^4$; ը) $(x - 3)^2\,x = 0$:

227. ա) $(3x + 3)(2x + 5) = 0$; բ) $(3x - 7)(4 - 3x) = 0$;
գ) $(5 - x)(3x + 2) = 0$; դ) $(7 - x)(6 - 9x) = 0$;
ե) $(2x - 3)(x^2 + 3x + 2) = 0$; զ) $(x^2 - 5x + 6)(3x - 2) = 0$;
է) $(x^2 + 1)(x^2 + 5x + 6) = 0$; ը) $(x^2 - 1)(x^2 - 5x + 6) = 0$;
թ) $(x^2 + 2x + 1)(x^2 - 5x + 7) = 0$; ժ) $(x^2 - 3x + 1)(x^2 - 4x + 4) = 0$;
ի) $(x^2 - 3x + 1)(x^2 + 4x - 3) = 0$; լ) $(x^2 - 5x + 1)(x^2 - x + 6) = 0$;
խ) $(x^2 + 1)(x^2 - 2x + 7) = 0$; ծ) $(x^2 - 3)(x^2 - 4x + 4) = 0$:

3.4 Հավասարում, որի մի կողմը հանրահաշվական կոտորակ է, իսկ մյուս մասը՝ զրո

ՕՐԻՆԱԿ 1. Լուծենք

$$\frac{x^2+4x-21}{x^2-x-3}=0 \qquad (1)$$

հավասարումը:

Մենք գիտենք, որ x անհայտով հավասարման արմատ կոչվում է այն x_0 թիվը, որը, տեղադրելով հավասարման մեջ x-ի փոխարեն, ստացվում է ճիշտ թվային հավասարություն: Ուստի, եթե x_0-ն (1) հավասարման արմատ է, ապա $\frac{x_0^2+4x_0-21}{x_0^2-x_0-3}$ թվային արտահայտության արժեքը զրո է: Իսկ դա հնարավոր է միայն այն դեպքում, երբ այդ արտահայտության համարիչը զրո է, իսկ հայտարարը հավասար չէ զրոյի:

Այսպիսով, որպեսզի լուծենք (1) հավասարումը, պետք է գտնենք

$$x^2+4x-21=0 \qquad (2)$$

հավասարման արմատները և տեղադրենք (1) հավասարման ձախ մասի հայտարարում:

(2) հավասարման այն արմատները, որոնց դեպքում կոտորակի հայտարարը դառնում է զրոյից տարբեր թիվ, (1) հավասարման արմատներ են: (1) հավասարումն այլ արմատներ չունի:

(2) քառակուսային հավասարման տարբերիչը դրական է, և հետևաբար, այն ունի երկու արմատ.

$$x_{1,2}=-2\pm\sqrt{4+21}=-2\pm5, \text{ այսինքն՝ } x_1=3 \text{ և } x_2=-7:$$

Տեղադրելով այս թվերը (1) հավասարման ձախ մասի հայտարարում՝ կստանանք.

$$x_1^2-x_1-3=9-3-3=3\neq0,$$
$$x_2^2-x_2-3=49+7-3=53\neq0:$$

Դա նշանակում է, որ $x_1=3$ և $x_2=-7$ թվերը (1) հավասարման արմատներ են, և այդ հավասարումն այլ արմատներ չունի:

ՕՐԻՆԱԿ 2. Լուծենք

$$\frac{x^2-x-2}{x^3-2x^2-3x}=0 \qquad (3)$$

հավասարումը:

Նախ՝ լուծենք $x^2-x-2=0$ հավասարումը:

Այն ունի երկու արմատ՝ $x_1=2$ և $x_2=-1$:

Դրանք x-ի փոխարեն տեղադրենք (3) հավասարման ձախ մասի հայտարարում.

$$x_1^3 - 2x_1^2 - 3x_1 = 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 = -6 \neq 0,$$
$$x_2^3 - 2x_2^2 - 3x_2 = (-1)^3 - 2\,(-1)^2 - 3(-1) = 0:$$

Հետևաբար, (3) հավասարումն ունի $x_1 = 2$ մեկ արմատը:

ՕՐԻՆԱԿ 3. Լուծենք

$$\frac{2x-3}{4x^4+4x^3-15x^2+2x-3} = 0 \qquad (4)$$

հավասարումը:

Նախ՝ լուծենք $2x - 3 = 0$ հավասարումը: Այն ունի մեկ՝ $x_1 = \dfrac{3}{2}$ արմատ: Քանի որ

$$4x_1^4 + 4x_1^3 - 15x_1^2 + 2x_1 - 3 =$$
$$= 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 + 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 - 15 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{3}{2} - 3 = 0,$$

ապա (4) հավասարումն արմատներ չունի:

ՕՐԻՆԱԿ 4. Լուծենք

$$\frac{x^2+x+1}{x-3} = 0 \qquad (5)$$

հավասարումը:

(5) հավասարումն արմատներ չունի, որովհետև արմատներ չունի

$$x^2 + x + 1 = 0$$

հավասարումը:

Այսպիսով, որպեսզի լուծեք

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \qquad (6)$$

հավասարումը, որտեղ $P(x)$-ը և $Q(x)$-ը բազմանդամներ են, անհրաժեշտ է գտնել $P((x) = 0$ հավասարման արմատները և տեղադրել (6) հավասարման ձախ մասի $Q(x)$ հայտարարի մեջ x-ի փոխարեն: Այդ արմատները, որոնց համար $Q(x)$-ը դառնում է զրոյից տարբեր թիվ, (6) հավասարման արմատներ են և այլ արմատներ (6) հավասարումը չունի:

228.° Ինչպե՞ս կարելի է լուծել հավասարումը, որի մի մասը 0 է, մյուս մասը՝ հանրահաշվական կոտորակ:

229. ա) a-ի և b-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում է տեղի ունենում $\frac{a}{b} = 0$ հավասարությունը:

բ) Ճի՞շտ է արդյոք, որ եթե $\frac{a}{c} = 0$, ապա $a = 0$:

գ) Ճի՞շտ է արդյոք, որ եթե $a = 0$, ապա $\frac{a}{c} = 0$:

դ) Համարժե՞ք են արդյոք $\frac{x-1}{x} = 0$ և $x - 1 = 0$ հավասարումները:

ե) Արդյոք 3 թիվը $\frac{x^2-9}{x-3} = 0$ հավասարման արմատ է:

230.° x-ի ի՞նչ արժեքի դեպքում է կոտորակը հավասար զրոյի.

ա) $\frac{x}{5}$; բ) $\frac{x+3}{6}$; գ) $\frac{x+2}{x}$; դ) $\frac{x}{x-4}$;

ե) $\frac{x-7}{x+1}$; զ) $\frac{x+3}{x-3}$; է) $\frac{x(x-3)}{x-3}$; ը) $\frac{x^2-1}{x-1}$:

231. Գրեք երեք հանրահաշվական կոտորակներ, որոնք հավասար են զրոյի, եթե

ա) $x = -2$, բ) $x = 0$, գ) $x = 3$, դ) $x = -2{,}5$:

Լուծեք հավասարումը (231-234).

232. ա) $\frac{x^2+2x}{x-2} = 0$; բ) $\frac{3x^2-7x}{x^2+1} = 0$;

գ) $\frac{(x-7)(1{,}5+x)}{x^2-3x+4} = 0$; դ) $\frac{(-2-x)(x-8{,}5)}{(x-3)(x+4)} = 0$;

ե) $\frac{x^2-8x+7}{x-3} = 0$; զ) $\frac{4x^2-4x-3}{x+2} = 0$;

է) $\frac{4x^2-12x-27}{x^2-3x-10} = 0$; ը) $\frac{4x^2+4x-35}{x^2-7x+12} = 0$:

233. ա) $\frac{x^2-2x+1}{x-7} = 0$; բ) $\frac{x^2+4x+4}{x+8} = 0$;

գ) $\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-7x+5}=0;$ դ) $\dfrac{x^2+3x+5}{x^2+3x-1}=0;$

ե) $\dfrac{(x-1)^2(x+2)}{x-1}=0;$ զ) $\dfrac{(x+7)^2(x-4)}{x-4}=0:$

234. ա) $\dfrac{x^2+x-6}{x+3}=0;$ բ) $\dfrac{x^2-x-20}{x-5}=0;$

գ) $\dfrac{x+7}{x+7}=0;$ դ) $\dfrac{x-9}{x-9}=0:$

235. ա) $\dfrac{x^3-4x^2+5x}{x^2-3}=0;$ բ) $\dfrac{x^3+3x^2-18x}{x^2+4}=0;$

գ) $\dfrac{2x^3-7x^2+6x}{2x^2-3x}=0;$ դ) $\dfrac{3x^3+5x^2+2x}{2x+3x^2}=0;$

ե) $\dfrac{9x^2-6x+1}{3x-1}=0;$ զ) $\dfrac{25x^2+10x+1}{5x+1}=0:$

3.5 Ռացիոնալ հավասարումների լուծումը

ՕՐԻՆԱԿ 1. Լուծենք

$$2-\frac{x+1}{x-1}=0 \tag{1}$$

հավասարումը:

(1) հավասարման ձախ մասում կիրառենք հանրահաշվական կոտորակների հանման կանոնը.

$$2-\frac{x+1}{x-1}=\frac{2(x-1)-(x+1)}{x-1}=\frac{x-3}{x-1}: \tag{2}$$

Ցանկացած $x_0 \neq 1$ թվի համար (2) հավասարության ձախ և աջ մասերի թվային արժեքներն իրար հավասար են:

Մասնավորապես, եթե ինչ-որ x_0 թվի համար (2) հավասարության մի կողմը դառնում է զրո, ապա զրո է դառնում նաև մյուս կողմը: Իսկ դա նշանակում է, որ (1) հավասարումը համարժեք է

$$\frac{x-3}{x-1}=0 \tag{3}$$

հավասարմանը:

(3) հավասարումն արդեն գիտենք լուծել (տե՛ս կետ 5.4-ը): Դրա համար նախ՝ լուծենք

$$x - 3 = 0$$

հավասարումը: Այն ունի մեկ՝ $x_0 = 3$ արմատ: Ընդ որում՝ այդ թիվը (3) հավասարման ձախ մասի կոտորակի հայտարարը զրո չի դարձնում.

$$x_0 - 1 = 3 - 1 = 2 \neq 0:$$

Դրա համար էլ (3) հավասարումն ունի մեկ՝ $x_0 = 3$ արմատ:

Նշանակում է՝ (1) սկզբնական հավասարումը ևս ունի մեկ՝ $x_0 = 3$ արմատ:

Օրինակ 2. Լուծենք

$$\frac{x-1}{x+2} = \frac{x-4}{x-3} - 1 \qquad (4)$$

հավասարումը:

(4) հավասարման աջ մասում գտնվող անդամները, տեղափոխելով ձախ մաս, կստանանք դրան համարժեք

$$\frac{x-1}{x+2} - \frac{x-4}{x-3} + 1 = 0 \qquad (5)$$

հավասարումը:

(5) հավասարման ձախ մասի համար կիրառենք հանրահաշվական կոտորակների գումարման և հանման կանոնները.

$$\frac{x-1}{x+2} - \frac{x-4}{x-3} + 1 =$$

$$= \frac{(x-1)(x-3) - (x-4)(x+2) + (x+2)(x-3)}{(x+2)(x-3)} = \frac{x^2 - 3x + 5}{(x+2)(x-3)}:$$

Դատելով օրինակ 1-ից՝ կստանանք (5) հավասարմանը համարժեք

$$\frac{x^2 - 3x + 5}{(x+2)(x-3)} = 0 \qquad (6)$$

հավասարումը:

(6) հավասարումը լուծելու համար նախ՝ պետք է լուծել

$$x^2 - 3x + 5 = 0$$

հավասարումը: Քանի որ նրա տարբերիչը՝

$$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -11 < 0,$$

ապա այն արմատներ չունի:

Հետևաբար, արմատներ չունի նաև (4) սկզբնական հավասարումը: Բեր-
ված օրինակներից հետևում է այսպիսի կանոն.

**Ռացիոնալ հավասարումը լուծելու համար բոլոր անդամնե-
րը պետք է տեղափոխել ձախ կողմ, այնուհետև կիրառելով
հանրահաշվական կոտորակների գումարման և հանման
կանոնները՝ ձախ մասը գրել հանրահաշվական կոտորակի
տեսքով և լուծել ստացված հավասարումը:**

Դիտողություն: Նշված կանոնից շեղվելը կարող է բերել տրված հավա-
սարման արմատների կորստի կամ կողմնակի արմատների ձեռք բերման:

Օրինակ, կիրառելով նշված կանոնը

$$\frac{(x-2)(x-3)}{x-3} = 1 \qquad (7)$$

հավասարման համար՝ կստանանք դրան համարժեք

$$\frac{(x-3)^2}{x-3} = 0 \qquad (8)$$

հավասարումը:

Այն արմատներ չունի, և հետևաբար, (7) հավասարումը նույնպես արմատ-
ներ չունի:

Սակայն, եթե մենք, շեղվելով կանոնից, (7) հավասարման ձախ մասի կո-
տորակը կրճատենք $(x-3)$-ով, ապա կստանանք

$$x - 2 = 1 \qquad (9)$$

հավասարումը, որն ունի $x = 3$ արմատը: Բայց $x = 3$-ը (7) հավասարման
արմատ չէ, $x = 3$ դեպքում (7) հավասարման ձախ մասն իմաստ չունեցող
արտահայտություն է:

Հետևաբար, այդպիսի «լուծման» դեպքում ձեռք բերեցինք (7) հավասար-
ման կողմնակի արմատ:

Իսկ եթե սկզբից տրված լիներ (9) հավասարումը, և մենք, շեղվելով կանոնից,
$\frac{x-2}{1}$ կոտորակի համարիչը և հայտարարը բազմապատկեինք ոչ զրոյական
$(x-3)$ բազմանդամով, ապա կստանայինք (7) հավասարումը, որը, ինչպես
տեսանք, արմատներ չունի:

Նշանակում է՝ այդպիսի «լուծման» դեպքում կորցրինք (9) հավասարման
արմատը:

236.° Ի՞նչ կանոնով են լուծում ռացիոնալ հավասարումը: Ի՞նչ կարող է տեղի ունենալ այդ կանոնից շեղվելու դեպքում:

237. Համարժե՞ք են արդյոք հավասարումները.

ա) $\dfrac{1}{x} = 3$ և $\dfrac{1}{x} - 3 = 0$; բ) $\dfrac{2x-4}{x-5} = 0$ և $\dfrac{x-2}{x-5} = 0$;

գ) $\dfrac{x}{x-1} + 3 = 0$ և $\dfrac{4x-3}{x-1} = 0$; դ) $\dfrac{2x}{x-1} = x$ և $\dfrac{2}{x-1} = 1$:

Լուծեք հավասարումը (237-243).

238. ա) $\dfrac{x-1}{x} + 2 = 0$; բ) $1 - \dfrac{2x}{x-1} = 0$; գ) $\dfrac{k+3}{k} = 4$;

դ) $2 = \dfrac{y}{y-5}$; ե) $\dfrac{3}{m} = \dfrac{m}{3}$; զ) $\dfrac{4}{x-1} = \dfrac{x}{5}$;

է) $x - \dfrac{9}{x} = 0$; ը) $\dfrac{25}{b} - b = 0$; թ) $y + \dfrac{1}{y} = 1$:

239. ա) $\dfrac{x^2}{x-3} - \dfrac{x+6}{x-3} = 1$; բ) $\dfrac{6x-5}{4x-3} = \dfrac{3x+3}{2x+5}$;

գ) $\dfrac{5a-7}{a+1} = \dfrac{2+5a}{a-2}$; դ) $1 - \dfrac{1-m}{m} = \dfrac{2m+2}{m-1}$:

240. ա) $\dfrac{y+1}{y-1} = 2 - \dfrac{y}{y+1}$; բ) $\dfrac{4n-1}{n+3} = \dfrac{4n+1}{n-3}$;

գ) $\dfrac{3c-2}{3c+2} = \dfrac{2c-5}{2c+5}$; դ) $\dfrac{x+2}{x-2} = \dfrac{x^2}{x-2} + 1$:

241. ա) $\dfrac{5-2a}{8a} + \dfrac{2a-5}{10a} = 0$; բ) $\dfrac{3x-1}{4x} + \dfrac{1-2x}{2x} = 0$;

գ) $a + \dfrac{1}{a-2} = 0$; դ) $a + \dfrac{4}{a-4} = 0$:

242. ա) $\dfrac{1}{2a-3} + \dfrac{1}{a-1} = 2$; բ) $\dfrac{x}{x-3x} + \dfrac{x-8}{x} = 3$;

գ) $\dfrac{b-3}{b^2-3b-4} = \dfrac{b-1}{b^2-b-2}$; դ) $\dfrac{x+1}{x+3} + \dfrac{4}{x+7} = 1$;

ե) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{4}{x+2}=\dfrac{3}{x}$; զ) $\dfrac{1}{z+1}+\dfrac{2}{z^2-1}=\dfrac{3}{z-1}$:

243. ա) $\dfrac{7}{x^2+x+12}-\dfrac{6}{x^2+2x-8}=0$; բ) $\dfrac{2}{a}+\dfrac{10}{a^2-2a}=\dfrac{1+2a}{a-2}$;

գ) $\dfrac{12}{3k-k^2}+\dfrac{3k+5}{k-3}=-\dfrac{1}{k}$; դ) $\dfrac{3m}{m+1}+\dfrac{2}{m}=\dfrac{2m+5}{m^2+m}$;

ե) $\dfrac{33}{b^2-36}+\dfrac{b-4}{11-b}=-\dfrac{3}{b}$; զ) $\dfrac{a+7}{a^2-7a}-\dfrac{4}{(7-a)^2}=\dfrac{1}{a-7}$;

է) $\dfrac{2p-2}{p^2-36}-\dfrac{p-2}{p^2-6p}-\dfrac{p-1}{p^2+6p}=0$:

244.* ա) $\dfrac{1}{x\,(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{1}{4}$;

բ) $\dfrac{1}{(x-3)(x-2)}+\dfrac{1}{(x-2)(x-1)}=-\,2$;

գ) $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}+\dfrac{1}{(x+3)(x+4)}=-\,1{,}5$:

3.6 Տեքստային խնդիրների լուծում ռացիոնալ հավասարումների օգնությամբ

Խնդիր 1. Ջերմանավը A նավամատույցից գետի հոսանքի ուղղությամբ գնաց 60 կմ, մինչև այդ գետի մեջ թափվող վտակը, և այդ վտակով հոսանքին հակառակ 20 կմ գնաց, մինչև B նավամատույցը: A-ից B ամբողջ ճանապարհի վրա ջերմանավը ծախսեց 7 ժամ: Վտակի և գետի հոսանքների արագությունները 1 կմ/ժ է: Գտնել ջերմանավի սեփական արագությունը (սեփական արագությունը՝ x կմ/ժ արագությունն է կանգնած ջրում):

Լուծում: Ջերմանավի սեփական արագությունը նշանակենք x կմ/ժ: Այդ դեպքում հոսանքի ուղղությամբ ջերմանավը գնում էր $(x+1)$ կմ/ժ արագությամբ և վտակին հասնելու պահին ծախսել էր $\dfrac{60}{x+1}$ ժամ:

Վտակով ջերմանավը շարժվում էր $(x-1)$ կմ/ժամ արագությամբ և B նավամատույց հասնելու պահին ծախսել էր $\frac{20}{x-1}$ ժամ: Ամբողջ ճանապարհի վրա ջերմանավը ծախսել էր 7 ժամ: Նշանակում է՝

$$\frac{60}{x+1}+\frac{20}{x-1}=7: \qquad (1)$$

Այսպիսով, որոնելի x թիվը պետք է դառնա (1) ռացիոնալ հավասարման արմատ: Լուծենք այդ հավասարումը:

Տեղափոխելով բոլոր անդամները ձախ կողմը և կիրառելով հանրահաշվական կոտորակների գումարման ու հանման կանոնները՝ կստանանք

$$\frac{7x^2-80x+33}{(x+1)(x-1)}=0$$

հավասարումը:

$7x^2-80x+33=0$ հավասարումն ունի

$$x_1=11,\ x_2=\frac{3}{7}$$

արմատները:

Դրանք x-ի փոխարեն տեղադրելով (2) հավասարման ձախ մասում գտնվող կոտորակի հայտարարում՝ տեսնում ենք, որ ստացվում են զրոյից տարբեր թվեր, հետևաբար, դառնում են (2), ուստի նաև՝ (1) հավասարման արմատներ:

Այսպիսով, (1) հավասարումն ունի երկու արմատ՝ $x_1=11$ և $x_2=\frac{3}{7}$:

Սակայն, ըստ խնդրի պայմանի, ջերմանավի արագությունը չի կարող 1 կմ/ժ-ից փոքր լինել, այլապես վտակի հոսանքին հակառակ այն չէր կարող գնալ: Հետևաբար, խնդրի պայմանին բավարարում է միայն $x=11$ թիվը:

Պատասխան՝ Ջերմանավի սեփական արագությունը 11 կմ/ժամ է:

Խնդիր 2. Առաջին բրիգադն առաջադրանքը կարող է կատարել 10 օրով շուտ, քան երկրորդը, իսկ երկու բրիգադները միասին այդ առաջադրանքը կարող են կատարել 12 օրում: Առանձին աշխատելով՝ բրիգադներից յուրաքանչյուրը քանի՞ օրում կարող է կատարել այդ առաջադրանքը:

Լուծում: Դիցուք, առաջին բրիգադն առաջադրանքը կարող է կատարել x օրում, այդ դեպքում երկրորդը կկատարի $x+10$ օրում: Առաջին բրիգադը մեկ օրում կկատարի առաջադրանքի $\frac{1}{x}$ մասը, իսկ երկրորդը՝ $\frac{1}{x+10}$: Միասին մեկ օրում կկատարեն առաջադրանքի $1 : 12 = \frac{1}{12}$ մասը:

Կազմենք հավասարումը.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+10} = \frac{1}{12} \qquad (3)$$

Ձևափոխելով (3) հավասարումը՝ կստանանք դրան համարժեք

$$\frac{x^2 - 14x - 120}{12x(x+10)} = 0 \qquad (4)$$

հավասարումը:

$x^2 - 14x - 120 = 0$ հավասարումն ունի $x_1 = 20$ և $x_2 = -6$ արմատները: Դրանք զրո չեն դարձնում (4) հավասարման ձախ մասի հայտարարը, ուստի, (3) հավասարման արմատներ են: Բայց, ըստ խնդրի բովանդակության, $x > 0$, ուստի, խնդրի պայմանին բավարարում է միայն $x_1 = 20$ թիվը: Այդ դեպքում՝ $x + 10 = 30$:

Պատասխան՝ Առաջին բրիգադն առաջադրանքը կարող է կատարել 20 օրում, երկրորդը՝ 30:

245. ա) Կոտորակի համարիչը 2-ով մեծ է հայտարարից: Եթե համարիչը բազմապատկենք 2-ով, իսկ հայտարարին գումարենք 3, ապա կստացվի $1\frac{2}{3}$ թիվը: Գտեք կոտորակը:

բ) Կոտորակի հայտարարը 2-ով մեծ է համարիչից: Եթե համարիչը մեծացնենք 15-ով, իսկ հայտարարը՝ 3-ով, ապա կստացվի $1\frac{5}{6}$ թիվը: Գտեք կոտորակը:

246. ա) Կոտորակի համարիչը 1-ով փոքր է հայտարարից: Եթե համարիչը բազմապատկենք 3-ով, իսկ հայտարարը՝ 2-ով, ապա կստացվի $1\frac{2}{7}$ թիվը: Գտեք կոտորակը:

բ) Կոտորակի համարիչը 6-ով փոքր է հայտարարից: Եթե հայտարարը մեծացնենք 5-ով, իսկ համարիչը բազմապատկենք 15-ով, ապա կստացվի 1,25 թիվը: Գտեք կոտորակը:

գ) Կոտորակի համարիչը 2-ով փոքր է հայտարարից: Եթե այդ կոտորակին գումարենք դրա հակադարձը, կստացվի $2\frac{4}{15}$ թիվը: Գտեք այդ կոտորակը:

247. ա) Երկու բնակավայրերի հեռավորությունը 50 կմ է: Այդ վայրերից միաժամանակ իրար դիմաց դուրս եկան մոտոցիկլավարը և հեծանվորդը: Մոտոցիկլավարի արագությունը 30 կմ/ժ-ով մեծ է հեծանվորդի արագությունից: Նրանք հանդիպեցին բնակավայրերից մեկից 10 կմ հեռավորության վրա: Որքա՞ն է հեծանվորդի արագությունը:
բ) Օգտագործելով նախորդ խնդրի պայմանը և լուծումը՝ որոշեք, թե հանդիպումից քանի րոպե հետո մոտոցիկլավարը կհասնի հեծանվորդին, եթե հանդիպումից հետո շարունակի իր ճանապարհը մինչև մյուս բնակավայր և առանց կանգ առնելու ետ շրջվի և շարժվի հակառակ ուղղությամբ: Ինչպիսի՞ լրացուցիչ ենթադրություններ պետք է կատարել խնդրի լուծման համար:

248. Երկու քաղաքների հեռավորությունը 60 կմ է: Առաջին քաղաքից դեպի երկրորդը միաժամանակ մեկնեցին երկու ավտոմեքենա: Առաջինի արագությունը 20 կմ/ժ-ով մեծ էր և երկրորդ քաղաք հասավ կես ժամ շուտ: Որոշեք յուրաքանչյուր ավտոմեքենայի արագությունը:

249. ա) Հեծանվորդը 5 կմ անցավ անտառային արահետով և 7 կմ մայրուղով՝ ամբողջ ճանապարհի վրա ծախսելով 1 ժամ: Մայրուղով նա գնում էր 4 կմ/ժ-ով ավելի արագ, քան անտառով: Ի՞նչ արագությամբ էր գնում հեծանվորդը անտառային ճանապարհով:
բ) Տուրիստը մայրուղով անցավ 3 կմ, իսկ գյուղամեջ ճանապարհով՝ 6 կմ՝ ծախսելով ամբողջ ճանապարհի վրա 2 ժամ: Ի՞նչ արագությամբ էր նա գնում գյուղամեջ ճանապարհով, եթե հայտնի է, որ մայրուղիով գնում էր 2 կմ/ժ-ով ավելի արագ, քան գյուղամեջ ճանապարհով:

250. ա) Մեկ դետալի մշակման համար առաջին բանվորը ծախսում է 1 րոպեից քիչ ժամանակ, քան երկրորդը: Քանի՞ դետալ է մշակում նրանցից յուրաքանչյուրը 4 ժամում, եթե այդ ժամանակում առաջին բանվորը 8 դետալ ավելի է մշակում, քան երկրորդը:
բ) Երկու բանվորուհի պետք է մշակեին120-ական դետալ: Նրանցից մեկն առաջադրանքը կատարեց 5 ժամով շուտ, քանի որ ժամում 2 դետալ ավելի էր մշակում, քան երկրորդը: Ժամում քանի՞ դետալ էր մշակում նրանցից յուրաքանչյուրը:

251. ա) Երկու մեքենագրուհի պետք է տպագրեին 120-ական էջ: Առաջին մեքենագրուհին աշխատանքն ավարտեց երկրորդից 1 օր շուտ, քանի որ օրական 10 էջ ավելի էր տպում, քան երկրորդը: Քանի՞ էջ էր տպում մեկ օրում նրանցից յուրաքանչյուրը:
բ) Կառքի առջևի անիվը 175 մ ճանապարհի վրա 20 պտույտ ավելի է կատարում, քան հետևի անիվը, որի շրջանագծի երկարությունը 1 մ-ով ավելի է առջևի անիվի շրջանագծի երկարությունից: Գտեք յուրաքանչյուր անիվի շրջանագծի երկարությունը:

252. ա) Բերքահավաքի ժամանակ երկու հողամասերից յուրաքանչյուրից հավաքեցին 500-ական ց հացահատիկ: Առաջին հողամասի մակերեսը 5 հա-ով փոքր է երկրորդ հողամասի մակերեսից: Քանի՞ ց հացահատիկ հավաքեցին յուրաքանչյուր հողամասի 1 հա-ից, եթե առաջին հողամասի 1 հա-ից 5 ց ավելի հավաքեցին, քան երկրորդի 1 հա-ից:
բ) Ավտոմեքենան պետք է անցներ 840 կմ: Ճանապարհի մեջտեղում վարորդը կանգ առավ ճաշելու համար և 1 ժամ հետո շարունակեց ճանապարհը: Նախատեսված վայրը ճիշտ ժամանակին հասնելու համար հարկ եղավ արագությունն ավելացնել 10 կմ/ժ-ով: Քանի՞ ժամ տևեց ամբողջ ուղևորությունը՝ ներառյալ կանգառի ժամանակը:
գ) A և B վայրերից, որոնց հեռավորությունը 32 կմ է, միաժամանակ իրար դիմաց դուրս եկան հետիոտնը և հեծանվորդը: 2 ժամ հետո նրանք հանդիպեցին: Հանդիպումից հետո հետիոտնը B վայրը հասավ 5ժ 20 ր ուշ, քան հեծանվորդը՝ A վայրը: Գտեք հետիոտնի և հեծանվորդի արագությունները:

253. Երկու վայրերի միջև ընկած ճանապարհն առաջին հետիոտնը կարող է անցնել 5 ժ-ով շուտ, քան երկրորդը: Եթե հետիոտներն այդ վայրերից միաժամանակ դուրս գան իրար դիմաց, ապա կհանդիպեն 6 ժ հետո: Նրանցից յուրաքանչյուրը քանի՞ ժամում կարող է անցնել այդ ճանապարհը:

254. Երկու էքսկավատոր միասին փոսորակը փորեցին 48 օրում: Առանձին աշխատելով՝ առաջին էքսկավատորն այդ աշխատանքը 3 անգամ ավելի արագ կարող է կատարել, քան երկրորդը: Քանի՞ օրում առաջին էքսկավատորը, աշխատելով առանձին, կարող է կատարել ամբողջ աշխատանքը:

255. Երկու հեծանվորդ միաժամանակ իրար դիմաց դուրս եկան A և B քաղաքներից: Առաջինը 1 ժամում 2 կմ-ով ավելի է անցնում, քան երկրորդը, և հասնում է B 1 ժամ շուտ, քան երկրորդը՝ A: A-ից B հեռավորությունը 24 կմ է: Որոշեք առաջին հեծանվորդի արագությունը:

256. Երկու բանվոր միասին աշխատանքն ավարտեցին 8 ժամում: Նրանցից առաջինը, առանձին աշխատելով, նույն աշխատանքը կարող է կատարել 12 ժամով շուտ, քան երկրորդը: Քանի՞ ժամում երկրորդ բանվորը, աշխատելով առանձին, կավարտի այդ աշխատանքը:

257.* ***Բեզուի խնդիրը:*** Մի մարդ ձի գնեց և որոշ ժամանակ հետո ձին վաճառեց 24 պիստոլով (դրամի միավոր է): Այդ վաճառքի ժամանակ նա կորցրեց այնքան տոկոս, որքան պիստոլ նա ծախսել էր ձին գնելիս: Ի՞նչ գումար էր նա վճարել ձիու համար:

258.* Առևտրականը գրքերը գնում է մեծածախ գնով և վաճառում է 110 դրամով: Նա հաշվեց, որ մեկ գրքի վաճառքից ստացված եկամուտը տոկոսով հավասար է գրքի մեծածախ արժեքին դրամով: Ինչքա՞ն է գրքի մեծածախ արժեքը:

3.7* Ռացիոնալ հավասարումների լուծումը անհայտների փոխարինման եղանակով

ՕՐԻՆԱԿ 1. Լուծենք

$$(x^2 - 5x + 7)^2 - 2(x^2 - 5x + 7) - 3 = 0 \qquad (1)$$

հավասարումը:

$$y = x^2 - 5x + 7 \qquad (2)$$

հավասարումով ներմուծենք նոր՝ y անհայտ: Այդ դեպքում (1) հավասարումը կդառնա y փոփոխականի նկատմամբ

$$y^2 - 2y - 3 = 0 \qquad (3)$$

քառակուսային հավասարում: Քանի որ

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 + 3 = 4 > 0,$$

ապա (3) հավասարումն ունի երկու արմատներ.

$$y_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p^2}{2}\right) - q} = 1 \pm 2,$$

այսինքն՝

$$y_1 = 3 \text{ և } y_2 = -1:$$

Տեղադրելով այս թվերը (2) հավասարման մեջ y-ի փոխարեն՝ կստանանք x-ի նկատմամբ $x^2 - 5x + 7 = 3$ և $x^2 - 5x + 7 = -1$ հավասարումները:

Նախ՝ լուծենք դրանցից առաջինը: Այն համարժեք է

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \qquad (4)$$

հավասարմանը, որի տարբերիչը՝ $D = b^2 - 4ac = 9 > 0$:

Հետևաբար, (4) հավասարումն ունի երկու արմատ.

$$x_1, = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{5 \pm 3}{2},$$

այսինքն՝ $x_1 = 4$ և $x_2 = 1$:

Հիմա լուծենք երկրորդ հավասարումը: Այն համարժեք է

$$x^2 - 5x + 8 = 0 \qquad (5)$$

հավասարմանը, որի դիսկրիմինանտը՝

$$D = b^2 - 4ac = -7 < 0:$$

Հետևաբար, (5) հավասարումն արմատներ չունի:

Այսպիսով, (1) հավասարումն ունի վերը գտնված x_1 և x_2 արմատները և այլ արմատներ չունի:

ՕՐԻՆԱԿ 2. Լուծենք

$$(x^4 + x^2 + 1)(x^4 + x^2 + 3) + 2 = 0 \qquad (6)$$

հավասարումը:

$$y = x^4 + x^2 + 1 \qquad (7)$$

նշանակումով մտցնենք նոր՝ y փոփոխական, այդ դեպքում (6) հավասարումը կվերածվի y փոփոխականի նկատմամբ

$$y^2 + 2y + 2 = 0 \qquad (8)$$

քառակուսային հավասարման, որի դիսկրիմինանտը՝

$$D = b^2 - 4ac = 4 - 8 < 0:$$

Հետևաբար, (8) հավասարումն արմատներ չունի: Ուրեմն, արմատներ չունի նաև (6) հավասարումը:

ՕՐԻՆԱԿ 3. Լուծենք

$$x^2 + 4x - \frac{15}{x^2 + 4x} - 2 = 0 \qquad (9)$$

հավասարումը:

Եթե այդ հավասարման ձախ մասը բերենք ընդհանուր հայտարարի, ապա կստանանք

$$\frac{x^4 + 8x^3 + 14x^2 - 8x - 15}{x^2 + 4x} = 0$$

հավասարումը, որի լուծման համար, ինչպես գիտենք, նախ՝ պետք է լուծել

$$x^4 + 8x^3 + 14x^2 - 8x - 15 = 0$$

հավասարումը: Բայց մենք այդպիսի հավասարման լուծման եղանակ չունենք: Դրա համար էլ (9) հավասարման լուծման այդ եղանակը մեզ այդ հավասարման արմատները գտնելու նպատակին չբերեց:

Կիրառենք հետևյալ հնարքը.

$$y = x^2 + 4x \tag{10}$$

նշանակումով ներմուծենք նոր՝ y անհայտ: Այդ դեպքում (9) հավասարումը կընդունի

$$y - \frac{15}{y} - 2 = 0 \tag{11}$$

տեսքը: (11) հավասարման ձախ մասը, բերելով ընդհանուր հայտարարի, կստանանք դրան համարժեք

$$\frac{y^2 - 2y - 15}{y} = 0 \tag{12}$$

հավասարումը: (12) հավասարման լուծման համար նախ՝ լուծենք

$$y^2 - 2y - 15 = 0$$

քառակուսային հավասարումը: Այս հավասարումն ունի երկու արմատ.

$$y_1 = 5 \text{ և } y_2 = -3:$$

Քանի որ այդ թվերից ոչ մեկը (12) հավասարման ձախ մասի հայտարարը զրո չի դարձնում, ապա (12) և հետևաբար՝ (11) հավասարումները ունեն երկու արմատ՝ $y_1 = 5$ և $y_2 = -3$: Այժմ (9) հավասարումը լուծելու համար մնում է լուծել երկու հավասարում.

$$x^2 + 4x = 5 \text{ և } x^2 + 4x = -3:$$

Արտագրենք այդ հավասարումները հետևյալ կերպ.

$$x^2 + 4x - 5 = 0 \text{ և } x^2 + 4x + 3 = 0:$$

Այս քառակուսի հավասարումներից յուրաքանչյուրն ունի երկուական արմատ.

$x_1 = 1$, $x_2 = -5$-ը առաջին հավասարման արմատներն են,

$x_3 = -1$, $x_4 = -3$ը՝ երկրորդ հավասարման արմատները:

Հետևաբար, (9) հավասարումն ունի չորս արմատ՝ 1, –5, –1, –3:

ՕՐԻՆԱԿ 4. Լուծենք

$$x^2 - 5x + 7 = \frac{12}{(x-2)(x-3)} \tag{13}$$

հավասարումը:

Վարվենք այնպես, ինչպես օրինակ 3-ում: Նկատելով, որ

$$(x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6,$$

ներմուծենք նոր փոփոխական.

$$y = x^2 - 5x + 6: \qquad (14):$$

Այդ դեպքում (13) հավասարումը կգրվի

$$y + 1 = \frac{12}{y} \tag{15}$$

տեսքով: (15) հավասարումը համարժեք է

$$\frac{y^2 + y - 12}{y} = 0 \tag{16}$$

հավասարմանը:

$$y^2 + y - 12 - 0$$

քառակուսային հավասարման լուծումներն են՝ $y_1 = 3$ և $y_2 = -4$: Քանի որ այդ թվերից ոչ մեկը (16) հավասարման ձախ մասի հայտարարը 0 չի դարձնում, ապա (16), ուրեմն նաև (15) հավասարումնարն ունեն երկու արմատ.

$$y_1 = 3 \text{ և } y_2 = -4:$$

Այժմ (13) հավասարման լուծման համար մնում է լուծել երկու հավասարում.

$$x^2 - 5x + 6 = 3 \text{ և } x^2 - 5x + 6 = -4:$$

Դրանցից առաջինն ունի երկու արմատ.

$$x_1 = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \text{ և } x_2 = \frac{5-\sqrt{13}}{2},$$

իսկ երկրորդն արմատներ չունի:

Հետևաբար, (13) հավասարումն ունի երկու արմատ.

$$x_1 = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \text{ և } x_2 = \frac{5-\sqrt{13}}{2},$$

Լուծեք հավասարումը (259-260).

259. ա) $(x + 2)^2 = 2\,(x + 2) + 3$;

բ) $(x^2 + 3x - 25)^2 - 2\,(x^2 + 3x - 25) = -7$;

գ) $(x^4 + x^2 + 1)(x^4 + x^2 + 2) = 12$;

դ) $(x^2 - 5x + 7)^2 - 2\,(x - 2)(x - 3) = 1$;

ե) $(x^2 + 5x - 7)(2x^2 + 10x - 11) + 1 = 0$:

260. ա) $\left(\dfrac{2x + 1}{x}\right)^2 - 2\left(\dfrac{2x + 1}{x}\right) = 3$;

բ) $\dfrac{x}{2x + 1} + \dfrac{2x + 1}{x} = 2$;

գ) $2x^2 - 3x + 2 - \dfrac{6}{2x^2 - 3x + 1} = 0$;

դ) $x^4 + 3x^2 = \dfrac{1}{x^4 + 3x^2 + 2}$;

ե) $\dfrac{x^2 + x - 5}{x} + \dfrac{3x}{x^2 + x - 5} + 4 = 0$:

ԳԼՈՒԽ IV

ՄԵԿ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆՈՎ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐ

$$
\begin{array}{r|l}
-\,2x^3 - 1 & x + 1 \\ \cline{2-2}
2x^3 + 2x^2 & 2x^2 \\ \cline{1-1}
-\,2x^2 - 1 & \\
\ldots &
\end{array}
$$

4.1 Գործողություններ մեկ փոփոխականով բազմանդամների հետ

7-րդ դասարանի հանրահաշվի դասընթացից վերհիշենք հետևյալը.

1. Տառերի և թվերի արտադրյալ հանդիսացող հանրահաշվական արտահայտությունն անվանում են ***միանդամ:*** Այդ տառերը և թվերը կոչվում են տրված միանդամի ***արտադրիչներ:***

Թիվը կամ մեկ տառը նույնպես անվանում են միանդամ:

0 թիվը կոչվում է ***զրոյական միանդամ:***

2. Ասում են, որ տառեր պարունակող ոչ զրոյական միանդամն ունի ***կատարյալ տեսք,*** եթե այն ունի միայն մեկ թվային արտադրիչ՝ գրված առաջին տեղում. ցանկացած տառ գրառման մեջ հանդես է գալիս միայն մեկ անգամ՝ որևէ աստիճանով, ընդ որում՝ տառերը գրված են լատինական այբուբենի հերթականությամբ:

Տառեր պարունակող ոչ զրոյական կատարյալ տեսքի միանդամի թվային արտադրիչը կոչվում է ***միանդամի գործակից:***

Զրոյական միանդամի կատարյալ տեսքը 0-ն է:

3. ***Կատարյալ տեսքի ոչ զրոյական միանդամի աստիճան է*** կոչվում դրա մեջ մտնող բոլոր տառերի աստիճանների գումարը:

Զրոյից տարբեր թիվը համարվում է ***զրո աստիճանի միանդամ:***

0 թիվը՝ զրոյական միանդամը, միակ միանդամն է, որի աստիճանը որոշված չէ:

4. ***Բազմանդամ է*** կոչվում միանդամների գումարը: Այդ գումարում մասնակցող միանդամները կոչվում են ***բազմանդամի անդամներ: Միանդամը նույնպես անվանում են բազմանդամ:***

Զրո-ն անվանում են զրոյական բազմանդամ:

5. Ասում են, որ ***բազմանդամն ունի կատարյալ տեսք,*** եթե դրա անդամները գրված են կատարյալ տեսքով և չկան նման անդամներ:
Երկու անդամ պարունակող կատարյալ տեսքի բազմանդամն անվանում են ***երկանդամ,*** երեք անդամներ պարունակող կատարյալ տեսքի բազմանդամը՝ ***եռանդամ*** և այլն:

6. ***Կատարյալ տեսքի ոչ զրոյական բազմանդամի աստիճան*** անվանում են դրա մեջ մտնող միանդամների աստիճաններից ամենամեծը:

7. Բազմանդամների գումարը, տարբերությունը և արտադրյալը բազմանդամ է:

Այստեղ կդիտարկենք միայն մեկ տառ պարունակող բազմանդամներ, այսինքն՝

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} +\dots a_1x + a_0$$

տեսքի բազմանդամներ, որտեղ n-ը տրված բնական թիվ է կամ 0, իսկ a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n-ը տրված թվերն են և կոչվում են ***բազմանդամի գործակիցներ.*** $a_n{\cdot}x^n$-ը կոչվում է բազմանդամի ***ավագ անդամ*** (եթե $a_n \neq 0$), իսկ a_n-***ը՝ ավագ անդամի գործակից:***

a_0-ն կոչվում է ***ազատ անդամ:*** Եթե $a_n \neq 0$, ապա, ըստ 6-րդ կետում բերված սահմանման, ***բազմանդամի աստիճանը*** կլինի n թիվը, որովհետև դրա մեջ մտնող միանդամներից ամենամեծ աստիճանն ունի a_nx^n-ը (ընդունված է կատարյալ տեսքի մեկ տառ պարունակող բազմանդամում անդամները գրառել աստիճանների նվազման կարգով):

Օրինակ, $5x^3 + 4x^2 - 2x + 7$ բազմանդամի գործակիցներն են 5, 4, –2 և 7-ը, ավագ աղամի գործակիցը 5 է, ազատ անդամը՝ 7, իսկ բազմանդամի աստիճանը 3 է: Եթե բազմանդամի բոլոր գործակիցները 0 են, ապա այդ բազմանդամը զրոյական բազմանդամ է (աստիճանը որոշված չէ):

Վերը նշված 7-րդ հատկությունից հետևում է, որ մեկ x տառ պարունակող բազմանդամների (կամ, ինչպես ընդունված է ասել, x-ի նկատմամբ բազմանդամների) գումարը, տարբերությունը և արտադրյալը նույնպես x-ի նկատմամբ բազմանդամ է, ընդ որում՝ արտադրյալ հանդիսացող բազմանդամի ավագ անդամը հավասար է արտադրիչ հանդիսացող բազմանդամների ավագ անդամների արտադրյալին, իսկ աստիճանը՝ աստիճանների գումարին:

Հանրահաշվական կոտորակներն ուսումնասիրելիս տեսանք, որ երկու բազմանդամների քանորդը կարող է բազմանդամ չլինել (ինչը տեղի էր ունենում նաև բնական թվերի դեպքում): Ուստի, ինչպես բնական թվերի դեպքում էր, կարելի է քննարկել ***բազմանդամների մնացորդով բաժանման*** խնդիրը:⌋

Դիցուք, տրված են

$$A = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} +....+ a_1 x + a_0 \text{ և}$$

$$B = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} +....+ b_1 x + b_0$$

x-ի նկատմամբ երկու բազմանդամ, ընդ որում` B-ն $m$ աստիճանի ոչ զրոյական բազմանդամ է, այսինքն` $b_m \neq 0$:

A ***բազմանդամը մնացորդով բաժանել*** B ***բազմանդամի վրա, նշանակում է գտնել այնպիսի*** Q ***և*** R ***բազմանդամներ, որ տեղի ունենա*** $A = Q \cdot B + R$ ***հավասարությունը, ընդ որում*** R ***բազմանդամի աստիճանը փոքր լինի*** B ***բազմանդամի աստիճանից, կամ*** R-***ը լինի զրոյական բազմանդամ:***

Q բազմանդամն անվանում են ***քանորդ,*** R բազմանդամը` ***մնացորդ:*** Եթե R-ը զրոյական բազմանդամ է, ապա ասում են, որ ***A բազմանդամը բաժանվում է B բազմանդամի վրա առանց մնացորդի*** (կամ A-ն բաժանվում է B-ի):

Նկատենք, որ զրո աստիճանի բազմանդամը կամայական զրոյից տարբեր թիվ է: Ցանկացած թիվ կարելի է դիտարկել որպես ցանկացած բազմանդամի բաժանարար:

Օրինակ` $\frac{1}{7}$ թիվը $x^2 + 2x + 3$ բազմանդամի բաժանարար է, որովհետև

$$x^2 + 2x + 3 = \frac{1}{7}(7x^2 + 14x + 21):$$

⌈Ինչպես և բնական թվերի դեպքում էր, A բազմանդամի B ոչ զրոյական բազմանդամի վրա մնացորդով բաժանումը կատարում են ***անկյունաձև բաժանման*** տեսքով, հետևյալ ալգորիթմով.

1.° Երկու բազմանդամներն էլ գրում ենք կատարյալ տեսքով:

2.° A-ի ավագ անդամը բաժանում ենք B-ի ավագ անդամի վրա և ստացված միանդամը գրում քանորդում:

3.° Այդ միանդամը բազմապատկում ենք B-ով և ստացված բազմանդամը գրում A-ի տակ:

4.° A-ից հանելով դրա տակ գրված բազմանդամը` ստանում ենք կամ A_1 բազմանդամ, որի աստիճանը փոքր է A-ի աստիճանից կամ զրոյական բազմանդամ է: Զրոյական բազմանդամ ստանալու դեպքում բաժանման պրոցեսն ավարտված է. A-ն լրիվ (առանց մնացորդի) բաժանվեց B-ի վրա, հակառակ դեպքում, A_1 բազմանդամը գրելով կատարյալ տեսքով, անցնում ենք ալգորիթմի 2°-րդ քայլին՝ A-ի փոխարեն օգտագործելով A_1 բազմանդամը:

5.° Այս պրոցեսը շարունակում ենք այնքան, որ 4° քայլում նկարագրված հանումը կատարելուց հետո ստացված բազմանդամի աստիճանը փոքր լինի B-ի աստիճանից կամ ստացվի զրոյական բազմանդամ:

Դիտողություն: Այն դեպքում, երբ B բազմանդամի աստիճանը մեծ է A բազմանդամի աստիճանից, հարկ չկա կիրառել այս ալգորիթմը, որովհետև այս դեպքում, ակնհայտ է, կարելի է վերցնել Q = 0, R = A, որովհետև

$$A = 0 \cdot B + A:$$

Օրինակ՝ x^2 բազմանդամը $x^3 + 1$ բազմանդամի վրա մնացորդով բաժանման արդյունքն է՝ $x^2 = 0 \cdot (x^3 + 1) + x^2$, այսինքն՝ քանորդը զրոյական բազմանդամ է, մնացորդը՝ x^2-ն:

ՕՐԻՆԱԿ 1. Բաժանենք $A = 3x^2 + 2x^4 - 2x + 1$ բազմանդամը $B = -x + 1 + x^2$ բազմանդամի վրա:

1.° Երկու բազմանդամներն էլ գրենք կատարյալ տեսքով.

$$A = 2x^4 + 3x^2 - 2x + 1 \text{ և } B = x^2 - x + 1$$

$$
\begin{array}{r|l}
-\;2x^4+3x^2-2x+1 & x^2-x+1 \\
2x^4-2x^3+2x^2 & \overline{2x^2+2x+3} \\
\hline
-\;2x^3+x^2-2x+1 & \\
2x^3-2x^2-2x & \\
\hline
-\;3x^2-4x+1 & \\
3x^2-3x+3 & \\
\hline
-x-2 &
\end{array}
$$

2.° A-ի ավագ անդամը՝ $2x^4$-ը, բաժանում ենք B-ի ավագ անդամի՝ x^2-ու վրա՝ $2x^4 : x^2 = 2x^2$, և ստացված արդյունքը՝ $2x^2$-ն, գրում քանորդում:

3.° $2x^2$-ն բազմապատկում ենք B-ով՝ $2x^2 \cdot (x^2 - x + 1) = 2x^4 - 2x^3 + 2x^2$, և ստացված արդյունքը գրում A-ի տակ:

4.° Կատարելով հանում՝ $A - (2x^4 - 2x^3 + 2x^2)$, ստանում ենք $2x^3 + x^2 - 2x + 1$ բազմանդամը (այստեղ նույնպես գումարելիները պետք է դասավորել x-ի աստիճանների նվազման կարգով):

5.° Ստացված տարբերության ավագ անդամը՝ $2x^3$-ը, բաժանում ենք B-ի ավագ անդամի՝ x^2-ու վրա՝ $2x^3 : x^2 = 2x$, և ստացված արդյունքը՝ $+2x$-ը՝ գրում քանորդում՝ այնտեղ արդեն գտնվող $2x^2$-ուց հետո, և կրկնում 3°-րդ քայլը:

6.° Այս պրոցեսը շարունակում ենք այնքան, որ մնացորդում ստացվի բազմանդամ, որի աստիճանը փոքր է B-ի աստիճանից՝ 2-ից:
Այսպիսով, ստացանք $2x^2 + 2x + 3$ քանորդը և $-x - 2$ մնացորդը, այսինքն՝

$$2x^4 + 3x^2 - 2x + 1 = (x^2 - x + 1) \cdot (2x^2 + 2x + 3) + (-x - 2):$$

ՕՐԻՆԱԿ 2. Բաժանենք $x^3 - 8$ բազմանդամը $x - 2$ բազմանդամի վրա.

$$\begin{array}{r|l}
-\; x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x - 8 & x - 2 \\ \cline{2-2}
x^3 - 2x^2 \qquad\qquad\quad & x^2 + 2x + 4 \\ \cline{1-1}
-\; 2x^2 + 0 \cdot x - 8 & \\
2x^2 - 4x \quad\;\; & \\ \cline{1-1}
-\; 4x - 8 & \\
4x - 8 & \\ \cline{1-1}
0 \;\; &
\end{array}$$

Այսպիսով՝ $x^3 - 8 = (x^2 + 2x + 4) \cdot (x - 2)$, այսինքն՝ $x^3 - 8$ բազմանդամը լրիվ (առանց մնացորդի) բաժանվեց $x - 2$-ի վրա, ստացվեց $x^2 + 2x + 4$ քանորդը և զրոյական մնացորդը՝ 0-ն:

ՕՐԻՆԱԿ 3. Պարզեք՝ n-ի ինչպիսի՞ ամբողջ արժեքների դեպքում են

ա) $\dfrac{6n + 7}{n}$, բ) $\dfrac{6n + 7}{n - 1}$, գ) $\dfrac{3n^2 + 3n + 2}{n + 1}$

հանրահաշվական կոտորակների արժեքները ամբողջ թվեր:

Լուծում. ա) $\dfrac{6n + 7}{n}$ կոտորակի համարիչը բաժանելով հայտարարի վրա՝ կստանանք

$$\begin{array}{r|l}
-\; 6n + 7 & n \\ \cline{2-2}
6n \quad\; & 6 \\ \cline{1-1}
7 &
\end{array},$$

այսինքն՝ $6n + 7 = 6 \cdot n + 7$, կամ որ նույնն է՝ $\dfrac{6n + 7}{n} = 6 + \dfrac{7}{n}$:

$6+\frac{7}{n}$ թիվը կլինի ամբողջ թիվ միայն այն դեպքում, երբ $\frac{7}{n}$-ը ամբողջ թիվ է, այսինքն, եթե 7-ը բաժանվում է n-ի: Իսկ դա տեղի է ունենում միայն $n=1$, $n=-1$, $n=7$, $n=-7$ դեպքում:

բ) Բաժանելով $\frac{6n+7}{n+1}$ կոտորակի համարիչը հայտարարի վրա՝

կստանանք
$$\begin{array}{r|l} +\;6n+7 & n+1 \\ \cline{2-2} 6n+6 & 6 \\ \cline{1-1} 1 & \end{array},$$

այսինքն՝ $6n+7=6\cdot(n+1)+1$ կամ որ նույնն է՝ $\frac{6n+7}{n+1}=6+\frac{1}{n+1}$:

$6+\frac{1}{n+1}$ թիվը կլինի ամբողջ թիվ միայն այն դեպքում, երբ $\frac{1}{n+1}$-ը ամբողջ թիվ է, այսինքն՝ 1-ը բաժանվում է $n+1$-ի վրա, այսինքն՝ միայն $n=0$ և $n=-2$ դեպքում:

գ) $\frac{3n^2+3n+2}{n+1}$ կոտորակի համարիչը բաժանելով հայտարարի վրա՝ կստանանք
$$\begin{array}{r|l} -\;3n^2+3n+2 & n+1 \\ \cline{2-2} 3n^2+3n & 3n \\ \cline{1-1} 2 & \end{array},$$

այսինքն՝ $\frac{3n^2+3n+2}{n+1}=3n+\frac{2}{n+1}$:

$3n+\frac{2}{n+1}$ թիվը կլինի ամբողջ թիվ, եթե $\frac{2}{n+1}$-ը ամբողջ է (քանի որ n-ի ամբողջ արժեքների դեպքում $3n$-ը ամբողջ թիվ է), այսինքն՝ 2-ը պետք է բաժանվի $n+1$-ի վրա: Իսկ դա հնարավոր է, եթե $n+1=1$, $n+1=-1$, որտեղից $n+1=2$, $n+1=-2$, $n=0$, $n=-2$, $n=1$, $n=-3$:

261. Կատարեք մնացորդով բաժանում.

ա) $x^3 + 4x^2 + x + 6$-ը $x + 1$-ի, $x - 2$-ի, $x - 3$-ի վրա,
բ) $x^4 + 2x^3 + x^2 + 6$-ը $x^2 + x + 1$-ի, $x^2 + x + 1$-ի, $x + 2$-ի վրա,
գ) $x^5 - 1$-ը $x^4 + 1$-ի, $x^3 - 1$-ի, $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$-ի վրա:

262. Գտեք այնպիսի A բազմանդամ, որի համար ճիշտ է հավասարությունը.

ա) $x^{12} - 1 = (x^4 - 1) \cdot A$;
բ) $x^{12} - 1 = (x^2 + 1) \cdot A$;
գ) $x^{12} - 1 = (x^2 - 1) \cdot A$;
դ) $x^{12} - 1 = (x + 1) \cdot A$;
ե) $x^{12} - 1 = (x - 1) \cdot A$;
զ) $x^5 - 32 = (x - 2) \cdot A$;
է) $x^6 - 64 = (x - 2) \cdot A$;
ը) $x^7 - 128 = (x - 2) \cdot A$:

263. Պարզեք՝ n-ի ինչպիսի՞ ամբողջ արժեքների դեպքում հանրահաշվական կոտորակի արժեքն ամբողջ թիվ է.

ա) $\dfrac{5n + 7}{n}$;
բ) $\dfrac{5n + 7}{n + 2}$;
գ) $\dfrac{3n^2 - 6n + 1}{n - 2}$;
դ) $\dfrac{7n + 5}{n}$;
ե) $\dfrac{7n + 5}{n + 1}$;
զ) $\dfrac{2n^2 - 6n + 7}{n - 3}$:

4.2 Բեզուի թեորեմը

Դիցուք՝

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0\text{-ը} \qquad (1)$$

x-ի նկատմամբ n ($n \geqslant 1$) աստիճանի բազմանդամ է, այսինքն՝ $a_n \neq 0$ (այս գրառման մեջ $P_n(x)$-ի n ինդեքսը ցույց է տալիս բազմանդամի աստիճանը): Ինչպես նշվեց նախորդ կետում, եթե $P_n(x)$ բազմանդամը բաժանենք $x - a$ երկանդամի վրա, ապա քանորդում կստացվի $n - 1$ աստիճանի $Q_{n-1}(x)$ բազմանդամ, իսկ մնացորդում՝ R թիվը, այսինքն՝

$$P_n(x) = (x - a) \cdot Q_{n-1}(x) + R: \qquad (2)$$

(2) հավասարությունից հետևում է, որ եթե $R = 0$, ապա $P_n(x)$ բազմանդամը վերլուծվում է արտադրիչների, որոնցից մեկը $x - a$ երկանդամն է:

$Q_{n-1}(x)$ քանորդը և R մնացորդը գտնելու համար սովորաբար կիրառում են վերը նշված անկյունաձև բաժանման եղանակը:

Օրինակ 1. Գտնենք $P_4(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x - 1$ բազմանդամը $x - 3$ երկանդամի վրա բաժանելուց ստացվող քանորդը և մնացորդը: Կիրառենք անկյունաձև բաժանման եղանակը.

$$
\begin{array}{r|l}
-\;x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x - 1 & x - 3 \\
x^4 - 3x^3 \qquad\qquad\qquad & x^3 + 5x^2 + 14x + 45 \\
\hline
-\;5x^3 - x^2 + 3x - 1 & \\
5x^3 - 15x^2 \qquad\quad & \\
\hline
-\;14x^2 + 3x - 1 & \\
14x^2 - 42x \quad & \\
\hline
-\;45x - 1 & \\
45x - 135 & \\
\hline
134 &
\end{array}
$$

Հետևաբար՝ $x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x + 1 = (x - 3)(x^3 + 5x^2 + 14x + 45) + 134$, այսինքն՝ քանորդը $x^3 + 5x^2 + 14x + 45$ բազմանդամն է, մնացորդը՝ 134-ը:

ՕՐԻՆԱԿ 2. Գտնենք $P_3(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ բազմանդամը $x - 1$ երկանդամի վրա բաժանելուց ստացված քանորդը և մնացորդը:

Կիրառենք անկյունաձև բաժանման եղանակը.

$$
\begin{array}{r|l}
-\;x^3 - 6x^2 + 11x - 6 & x - 1 \\
x^3 - x \qquad\qquad\quad & x^2 - 5x + 6 \\
\hline
-\;-5x^2 + 11x - 6 & \\
5x^2 + 5x \quad\;\; & \\
\hline
-\;6x - 6 & \\
6x - 6 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Հետևաբար՝ $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x^2 - 5x + 6)$, այսինքն՝ քանորդը $x^2 - 5x + 6$ բազմանդամն է, իսկ մնացորդը հավասար է 0-ի:

Եթե պահանջվում է գտնել միայն $P_n(x)$ բազմանդամը $x - a$ երկանդամի վրա բաժանելուց ստացված մնացորդը, ապա օգտվում են հետևյալ պնդումից.

Բեզուի թեորեմը: (1) ***բազմանդամը*** $x - a$ ***երկանդամի վրա բաժանելուց ստացված*** R ***մնացորդը հավասար է*** $P_n(x)$ ***բազմանդամի արժեքին*** $x = a$ ***դեպքում, այսինքն*** $R = P_n(a)$:

Ապացույց: Եթե (2) հավասարության մեջ x-ի փոխարեն տեղադրենք a թիվը, կստացվի $P_n(a) = R$, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

Օգտվելով Բեզուի թեորեմից՝ (2) հավասարությունը հաճախ գրում են

$$P_n(x) = (x - a) \cdot Q_{n-1}(x) + P_n(a)$$

տեսքով:

4.3 Մեկ փոփոխականով բազմանդամի արմատները

x_0 թիվը կոչվում է $P_n(x)$ ***բազմանդամի արմատ,*** եթե $x = x_0$ դեպքում $P_n(x)$ բազմանդամի արժեքը հավասար է զրոյի՝ $P_n(x_0) = 0$, այսինքն՝ $P_n(x)$ բազմանդամը $x - x_0$ երկանդամի վրա բաժանելուց ստացված մնացորդը հավասար է զրոյի:

Օրինակ 1-ում $P_4(3) = 134$, և հետևաբար, 3 թիվը չի հանդիսանում $P_4(x)$ բազմանդամի արմատ, իսկ օրինակ 2-ում՝ $P_3(1) = 0$, ուստի, 1 թիվը $P_3(x)$ բազմանդամի արմատ է, և այդ բազմանդամն արտադրիչների վերլուծելիս դրանց մեջ կա $x - 1$ արտադրիչը:

Բազմանդամի ամբողջ արմատները:

Դիտարկենք բազմանդամներ, որոնց ավագ անդամի գործակիցը 1 է:

Թեորեմ 1. Եթե

$$P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \qquad (3)$$

բազմանդամի բոլոր a_0, a_1, ..., a_{x-1} ***գործակիցներն ամբողջ թվեր են, և*** m ***ամբողջ թիվն այդ բազմանդամի արմատն է, ապա այդ*** m ***թիվը*** a_0 ***ազատ անդամի բաժանարար է:***

Ապացույց: Քանի որ m-ը $P_n(x)$ բազմանդամի արմատ է, ապա $P_n(m) = 0$, այսինքն՝ ճիշտ է

$$m^n + a_{n-1} \cdot m^{n-1} + \dots + a_1 \cdot m + a_0 = 0 \qquad (4)$$

հավասարությունը: (4) հավասարությունն արտագրենք այսպես.

$$a_0 = m \cdot (-m^{n-1} - a_{n-1} \cdot m^{n-2} - \dots - a_1) \qquad (5)$$

Քանի որ (5) հավասարության փակագծերի մեջ գրված է ամբողջ թիվ և (5) հավասարության աջ մասը բաժանվում է m-ի, ապա ձախ մասը՝ a_0-ն, նույնպես բաժանվում է m-ի, ինչը և պահանջվում է ապացուցել:

Դիտողություն: Թեորեմ 1-ի հակառակ պնդումը ճիշտ չէ, այսինքն՝ a_0-ի բաժանարարը կարող է ամբողջ գործակիցներով բազմանդամի արմատ չլինել: Օրինակ՝ $P_2(x) = x^2 + 2x + 6$ բազմանդամի ազատ անդամի՝ 6-ի համար 3-ը բաժանարար է, բայց 3-ը $P_2(x)$-ի արմատ չէ, որովհետև

$$P_2(3) = 3^2 + 3 \cdot 2 + 6 = 21 \neq 0$$

(հեշտ է տեսնել, որ $P_2(x)$-ը ընդհանրապես արմատ չունի):

Թեորեմ 2. ***Եթե (3) բազմանդամի բոլոր գործակիցներն ամբողջ թվեր են, և որևէ ռացիոնալ թիվ այդ բազմանդամի արմատ է, ապա այդ ռացիոնալ թիվն ամբողջ թիվ է:***

Ապացույց: Դիցուք, $\dfrac{p}{q}$ ռացիոնալ թիվը ($p \in Z$, $q \in N$) (3) բազմանդամի արմատ է: Համարենք, որ այդ կոտորակն անկրճատելի է, այսինքն՝ p-ն և q-ն ընդհանուր բաժանարար չունեն (հակառակ դեպքում կրճատումից հետո ստացված կոտորակը կնշանակեինք $\dfrac{p}{q}$-ով): Ցույց տանք, որ q-ն չի կարող 1-ից մեծ լինել: Ենթադրենք հակառակը՝ $q > 1$: Քանի որ $\dfrac{p}{q}$-ն $P_n(x)$ բազմանդամի արմատ է, ապա $P_n\left(\dfrac{p}{q}\right) = 0$, այսինքն՝ ճիշտ է հետևյալ հավասարությունը.

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \cdot \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot \frac{p}{q} + a_0 = 0: \qquad (6)$$

Այստեղից՝

$$\frac{p^n}{q^n} = -a_{n-1} \cdot \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} - \ldots - a_1 \cdot \frac{p}{q} - a_0: \qquad (7)$$

Բազմապատկելով (7) հավասարության երկու մասը q^{n-1}-ով՝ կստանանք, որ ճիշտ է հետևյալ հավասարությունը՝

$$\frac{p^n}{q} = -a_{n-1} \cdot p^{n-1} - \ldots. - a_1\, p \cdot q^{n-2} - a_0\, q^{n-1}: \qquad (8)$$

(8) հավասարության աջ մասն ամբողջ թիվ է, ձախ մասը՝ անկրճատելի կոտորակ, որովհետև p^n-ը չի բաժանվում է q-ի վրա, քանի որ p-ն և q-ն ընդհանուր արտադրիչ չունեն (բացի 1-ից): Ստացվեց հակասություն, հետևաբար, մեր ենթադրությունը, որ $q > 1$, սխալ էր: Դա նշանակում է, որ $q = 1$, այսինքն բազմանդամի ռացիոնալ արմատն ամբողջ թիվ է:

1 և 2 թեորեմներից հետևում է, որ եթե ամբողջ գործակիցներով (3) բազմանդամն ունի ռացիոնալ արմատներ, ապա այդ արմատներն ամբողջ թվեր են և բազմանդամի ազատ անդամի բաժանարարներ: Ուստի, պարզելու համար, թե (3) բազմանդամն ունի ռացիոնալ արմատ, պետք է ստուգել՝ արդյոք բազմանդամի ազատ անդամի յուրաքանչյուր բաժանարար այդ բազմանդամի արմատ է: Եթե ազատ անդամի ոչ մի բաժանարար այդ բազմանդամի արմատ չէ, ապա այդ բազմանդամը ռացիոնալ արմատ չունի:

ՕՐԻՆԱԿ 3. Պարզենք՝ ինչպիսի ռացիոնալ արմատներ ունի

$$P_4(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 1$$

բազմանդամը:

Այս բազմանդամի ազատ անդամը՝ 1-ը, ունի 1 և −1 ամբողջ բաժանարարներ: Հաշվենք $P_4(1)$ և $P_4(-1)$-ը.

$$P_4(1) = 1^4 - 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = 0,$$
$$P_4(-1) = (-1)^4 - (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 1 = 8 \neq 0:$$

Հետևաբար, $P_4(x)$ բազմանդամն ունի ռացիոնալ արմատ՝ 1 թիվը: $P_4(x)$ բազմանդամը վերլուծենք արտադրիչների: Դրա համար $P_4(x)$-ը բաժանենք $x - 1$ երկանդամի վրա (անկյունաձև եղանակով).

$$\begin{array}{r|l}
-\;x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 1 & x - 1 \\ \cline{2-2}
x^4 - x^3 \qquad\qquad\qquad & x^3 + 2x - 1 \\ \cline{1-1}
-\;2x^2 - 3x + 1 & \\
2x^2 - 2x \quad\; & \\ \cline{1-1}
-\;-x + 1 & \\
-x + 1 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Հետևաբար՝ $x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = (x^3 + 2x - 1)(x - 1)$:

Այժմ՝ ստուգենք

$$P_3(x) = x^3 + 2x - 1$$

բազմանդամն ունի՞ արդյոք ռացիոնալ արմատներ: Այդ բազմանդամի ազատ անդամի արտադրիչներն են 1-ը և −1-ը:

Հաշվենք $P_3(1)$-ը և $P_3(-1)$-ը.

$$P_3(1) = 1 + 2 \cdot 1 - 1 = 2 \neq 0, \quad P_3(-1) = (-1)^3 + 2 \cdot (-1) - 1 = -4 \neq 0:$$

Հետևաբար, $P_3(x)$ բազմանդամը ռացիոնալ արմատներ չունի, ուստի, $P_4(x)$ բազմանդամն ունի միայն մեկ ռացիոնալ արմատ՝ 1 թիվը:

4.4 $P_n(x) = 0$ հավասարումների լուծումը:

Ամբողջ գործակիցներով $P_n(x)$ բազմանդամի ռացիոնալ արմատների գտնել կարողանալը օգնում է լուծել $P_n(x) = 0$ հավասարումը (Նորից քննարկում ենք այն դեպքը, երբ $P_n(x)$-ի ավագ անդամի գործակիցը 1 է):

ՕՐԻՆԱԿ 4. Լուծենք

$$x^5 - x^4 - 4x^3 + 5x^2 + x - 2 = 0 \qquad (9)$$

հավասարումը:

$$P_5(x) = x^5 - x^4 - 4x^3 + 5x^2 + x - 2$$

բազմանդամի ազատ անդամի՝ −2-ի բոլոր ամբողջ թիվ հանդիսացող բաժանարարները 1, −1, 2 և −2 թվերն են: Քանի որ

$$P_5(1) = 1 - 1 - 4 + 5 + 1 - 2 = 0,$$

ապա 1-ը $P_5(x)$-ի արմատն է, և այդ բազմանդամը կարելի է վերլուծել արտադրիչների: Դրա համար անկյունաձև եղանակով $P_5(x)$ բազմանդամը բաժանենք $x - 1$ երկանդամի վրա.

$$\begin{array}{r|l}
-\;x^5 - x^4 - 4x^3 + 5x^2 + x - 2 & x - 1 \\
x^5 - x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad & \overline{x^4 - 4x^2 + x + 2} \\
\hline
-\;-4x^3 + 5x^2 + x - 2 & \\
-4x^3 + 4x^2 \qquad\quad & \\
\hline
-\;x^2 + x - 2 & \\
x^2 - x \qquad & \\
\hline
-\;2x - 2 & \\
2x - 2 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Այսպիսով՝ $P_5(x) = P_4(x) \cdot (x - 1)$, որտեղ $P_4(x) = x^4 - 4x^2 + x + 2$:

Այժմ ստուգենք՝ $P_4(x)$ բազմանդամն ունի՞ արդյոք ռացիոնալ արմատներ: $P_4(x)$ բազմանդամի ազատ անդամի բոլոր բաժանարարները 1, −1, 2 և −2 թվերն են: Քանի որ $P_4(1) = 1 - 4 + 1 + 2 = 0$, ապա 1-ը $P_4(x)$ բազմանդամի արմատ է և արտադրիչների վերլուծելիս կունենա $x - 1$ արտադրիչ:

Անկյունաձև եղանակով $P_4(x)$ բազմանդամը բաժանենք $x - 1$ երկանդամի վրա.

$$
\begin{array}{r|l}
-\;x^4 + 0 \cdot x^3 - 4x^2 + x + 2 & x - 1 \\ \cline{2-2}
x^4 - x^3 \phantom{{}- 4x^2 + x + 2} & x^3 + x^2 - 3x - 2 \\ \cline{1-1}
-\;x^3 - 4x^2 + x + 2 & \\
x^3 - x^2 \phantom{{}+ x + 2} & \\ \cline{1-1}
-\;-3x^2 + x + 2 & \\
-3x^2 + 3x \phantom{{}+ 2} & \\ \cline{1-1}
-\;-2x + 2 & \\
-2x + 2 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Այսպիսով՝ $P_4(x) = P_3(x) \cdot (x - 1)$, որտեղ $P_3(x) = x^3 + x^2 - 3x - 2$:

$P_3(x)$ բազմանդամի ազատ անդամի բոլոր բաժանարարները 1, −1, 2 և −2 թվերն են: Հաշվենք $P_3(1)$, $P_3(-1)$, $P_3(2)$ և $P_3(-2)$-ը.

$$
\begin{aligned}
&P_3(1) = 1 + 1 - 3 - 2 = -3 \neq 0 \\
&P_3(-1) = -1 + 1 + 3 - 2 = 1 \neq 0 \\
&P_3(2) = 8 + 4 - 6 - 2 = 4 \neq 0 \\
&P_3(-2) = -8 + 4 + 6 - 2 = 0
\end{aligned}
$$

Քանի որ $P_3(-2) = 0$, ապա −2-ը $P_3(x)$ բազմանդամի արմատ է, և $P_3(x)$-ի արտադրիչների վերլուծման մեջ կա $x + 2$ արտադրիչը: Բաժանենք $P_3(x)$-ը $x + 2$ վրա.

$$
\begin{array}{r|l}
-\;x^3 + x^2 - 3x - 2 & x + 2 \\ \cline{2-2}
x^3 + 2x^2 \phantom{{}- 3x - 2} & x^2 - x - 1 \\ \cline{1-1}
-\;-x^2 - 3x - 2 & \\
-x^2 - 2x \phantom{{}- 2} & \\ \cline{1-1}
-\;-x - 2 & \\
-x - 2 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Այսպիսով՝ $P_3(x) = P_2(x)$ գ$(x + 2)$, որտեղ $P_2(x) = x^2 - x - 1$: Քանի որ $P_2(x)$-ը քառակուսային եռանդամ է, ապա դրա արմատները կարելի է հեշտությամբ գտնել.

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{և} \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},$$

հետևաբար՝

$$P_2(x) = (x - x_1)(x - x_2):$$

Ամփոփելով արդյունքները՝ ստանում ենք, որ

$$P_5(x) = (x - 1)^2(x + 2)(x - x_1)(x - x_2):$$

Ուստի, (10) հավասարման արմատներն են.

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},\ x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},\ x_3 = -2,\ x_4 = 1:$$

Ակնհայտ է, որ այլ արմատներ հավասարումը չունի:

⌈**Դիտողություն:** Հասկանալի է, որ եթե որևէ քայլում պարզվեր, որ ընթացիկ բազմանդամն ամբողջ արմատներ չունի, ապա նկարագրված եղանակը ոչ մի արդյունք չէր տա, և պետք է փնտրել հավասարման լուծման այլ ուղիներ:⌋

ՕՐԻՆԱԿ 5. Լուծենք

$$x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{9} = 0 \tag{10}$$

հավասարումը:

Քանի որ $x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{9}$ եռանդամի գործակիցներն ամբողջ թվեր չեն, ապա բազմապատկելով (10) հավասարման երկու մասը 9-ով՝ կստանանք դրան համարժեք

$$9x^3 + 6x^2 - 1 = 0 \tag{11}$$

հավասարումը:

Քանի որ

$$P_3(x) = 9x^3 + 6x^2 - 1$$

բազմանդամի ավագ անդամի գործակիցը 1 չէ, ապա վերը քննարկված եղանակը հնարավոր չէ կիրառել: Դրա համար վարվենք այսպես. բազմապատկելով (11) հավասարման երկու մասը 3-ով՝ կստանանք դրան համարժեք

$$(3x)^3 + 2 \cdot (3x)^2 - 3 = 0 \tag{12}$$

հավասարումը: Այս հավասարման մեջ կատարելով $y = 3x$ փոփոխականների փոխարինում՝ կստանանք

$$y^3 + 2y^2 - 3 = 0 \qquad (13)$$

հավասարումը: Քանի որ $P_3(y) = y^3 + 2y^2 - 3$ բազմանդամի ավագ անդամի գործակիցը 1 է, ապա (13) հավասարման համար կարելի է կիրառել վերը դիտարկած եղանակը:

$P_3(y)$ բազմանդամի ազատ անդամի՝ -3-ի բոլոր բաժանարարները 1, -1, 3 և -3 թվերն են: Քանի որ

$$P_3(1) = 1 + 2 - 3 = 0,$$

ապա $P_3(y)$ բազմանդամը բաժանվում է $y - 1$ երկանդամի վրա.

$$\begin{array}{rl|l}
- & y^3 + 2y^2 + 0 \cdot y - 3 & y - 1 \\ \cline{3-3}
 & \underline{y^3 - y^2} & y^2 + 3y + 3 \\
- & 3y^2 + 0 \cdot y - 3 & \\
 & \underline{3y^2 - 3y} & \\
- & 3y - 3 & \\
 & \underline{3y - 3} & \\
 & 0 &
\end{array}$$

Այսպիսով՝ $P_3(y) = P_2(y) \cdot (y - 1)$, որտեղ

$$P_2(y) = y^2 + 3y + 3:$$

Քանի որ $P_2(y)$ քառակուսային եռանդամի տարբերիչը փոքր է զրոյից, ապա $P_2(y)$ քառակուսային եռանդամը չի վերլուծվում գծային արտադրիչների և արմատներ չունի, ուստի, (13) հավասարման միակ արմատը $y = 1$ թիվն է: Այժմ (11) հավասարման արմատը կգտնենք $y = 3x$ պայմանից: (11) հավասարումը և հետևաբար դրան համարժեք (10) հավասարումն ունեն մեկ արմատ՝ $x = \frac{1}{3}$:

264. Բազմանդամը բաժանեք $x - 1$ երկանդամի վրա.

ա) $2x^2 + x^2 + 3$;
բ) $x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x - 1$;
գ) $4x^3 + 5x^2 - 3x + 2$;
դ) $x^5 - 3x^3 + 3x - 10$:

265. Առանց բաժանում կատարելու գտեք տրված բազմանդամը $x-1$ և $x+1$ երկանդամների վրա բաժանելուց ստացված մնացորդը.

ա) $5x^3-3x^2+2$; բ) $2x^4-3x^3-4x^2+5x-6$;

գ) $3x^3+2x^2-6x+7$; դ) $3x^5-4x^2-3x+6$:

266. Բազմանդամը վերլուծեք արտադրիչների.

ա) x^3-x^2-x-2; բ) x^3-4x^2+4x-3;

գ) x^3-7x+6; դ) x^3-6x-9;

ե) $x^4+2x^3-3x^2-4x+4$; զ) $x^4-2x^3-3x^2+4x+4$;

է) $x^4-x^3-3x^2+5x-4$; ը) $x^4+4x^3+6x^2+4x+1$:

Լուծեք հավասարումը (267-269).

267. ա) $x^3+2x^2-x-2=0$; բ) $x^3+6x^2+11x+6=0$;

գ) $x^3-2x^2-2x-3=0$; դ) $x^3+x^2-x+2=0$;

ե) $x^3+2x^2-7x+4=0$; զ) $x^3-5x^2+8x-4=0$:

268. ա) $x^4+x^3-x^2+x-2=0$; բ) $x^4-x^3-x^2-x-2=0$;

գ) $x^4-x^3-7x^2+x+6=0$; դ) $x^4+x^3-7x^2-x+6=0$;

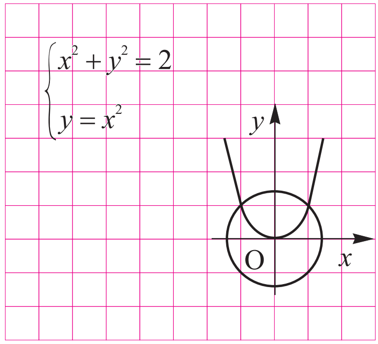
ե) $x^4+2x^3-3x^2-8x-4=0$; զ) $x^4+4x^3+3x^2-4x-4=0$:

269. ա) $2x^3+x^2-13x+6=0$; բ) $2x^3-x^2-13x-6=0$;

գ) $3x^3+4x^2+7x+2=0$; դ) $3x^3+x^2+2x-1=0$;

ե) $2x^4-7x^3+4x^2-2x-3=0$; զ) $2x^4+x^3-x^2+8x-4=0$:

ՌԱՑԻՈՆԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐ



5.1 Ռացիոնալ հավասարումների համակարգի գաղափարը

Հավասարումը, որի երկու մասերը x և y փոփոխականների նկատմամբ ռացիոնալ արտահայտություններ են, անվանում են x ***և*** y ***երկու փոփոխականներով ռացիոնալ հավասարում:*** (Ռացիոնալ արտահայտության գաղափարին ծանոթ եք 8-րդ դասարանի հանրահաշվի դասընթացից):

Ահա x և y երկու փոփոխականներով ռացիոնալ հավասարումների օրինակներ.

$$2x + y - 4 = 0 \qquad (1)$$

$$2x^2 - 3x + y - x + 1 = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{1}{x} = 3 - \frac{4}{y} \qquad (3)$$

$(x_0; y_0)$ թվազույգն ***անվանում են*** x ***և*** y ***երկու անհայտներով հավասարման լուծում,*** եթե այդ թվերը բավարարում են այդ հավասարմանը, այսինքն՝ x-ի փոխարեն տեղադրելով x_0 և y-ի փոխարեն՝ y_0՝ հավասարումը դառնում է ճիշտ թվային հավասարություն:

Օրինակ՝ (2; 0) թվազույգը (1) հավասարման լուծում է, (0; 1) թվազույգը՝ (2), (–1; 1)-ը՝ (3):

Հավասարումը, որի երկու մասերը x, y ***և*** z***-ի նկատմամբ ռացիոնալ արտահայտություններ են, անվանում են*** x, y ***և*** z ***երեք փոփոխականներով ռացիոնալ հավասարում:***

Ահա x, y և z երեք փոփոխականներով ռացիոնալ հավասարումների օրինակներ.

$$3x - 6y + z - 6 = 0 \qquad (4)$$

$$7x^2 + 5xy - z^2 + yz - x + z + y - 3 = 0 \qquad (5)$$

$$\frac{x-y}{x-z} + \frac{x+y}{x+z} = x + y + z \qquad (6)$$

(x_0; y_0; z_0) թվերի եռյակն անվանում են x, y և z երեք փոփոխականներով հավասարման լուծում, եթե այդ թվերը բավարարում են այդ հավասարմանը, այսինքն՝ x-ի փոխարեն տեղադրելով x_0, y-ի փոխարեն՝ y_0, z-ի փոխարեն՝ z_0՝ հավասարումը վերածվում է ճիշտ թվային հավասարության:

Օրինակ՝ (2; –1; –6) եռյակը (4) հավասարման լուծում է, (0; 3; 0) եռյակը՝ (5), (0; 1; 1)-ը՝ (6):

Նման կերպ է սահմանվում n անհայտով ռացիոնալ հավասարումը և դրա լուծումը:

Ռացիոնալ հավասարումը, որի ձախ մասն առաջին աստիճանի բազմանդամ է, իսկ աջ մասը՝ զրո, անվանում են նաև ***առաջին աստիճանի հավասարում:***

Օրինակ՝ (1)-ը x և y երկու փոփոխականներով առաջին աստիճանի հավասարում է, (4)-ը՝ x, y և z երեք փոփոխականներով:

Ռացիոնալ հավասարումը, որի ձախ մասը երկրորդ աստիճանի բազմանդամ է, իսկ աջ մասը՝ զրո, անվանում են ***երկրորդ աստիճանի հավասարում:***

Օրինակ՝ (2)-ը x և y երկու փոփոխականներով երկրորդ աստիճանի հավասարում է, (5)-ը՝ x, y և z երեք փոփոխականներով: Ռացիոնալ հավասարումը, որի ձախ մասը n աստիճանի բազմանդամ է, իսկ աջ մասը՝ 0, անվանում են n - ***աստիճանի հավասարում:***

Օրինակ՝ $x^2 - xy^2 + 7 = 0$-ն 3-րդ աստիճանի հավասարում է, իսկ $x^3y - x^{10} + 1 = 0$ հավասարումը՝ 10-րդ:

Դիցուք, տրված են x և y երկու փոփոխականներով երկու ռացիոնալ հավասարումներ: Ասում են, որ պետք է լուծել x և y երկու փոփոխականներով երկու ռացիոնալ հավասարումների համակարգը, եթե պահանջվում է գտնել բոլոր (x; y) թվազույգերը, որոնք միաժամանակ և՛ առաջին, և՛ երկրորդ հավասարումների լուծումներ են:

Ահա x և y երկու փոփոխականներով երկու ռացիոնալ հավասարումների համակարգերի օրինակներ.

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0, \\ 2x - 7y + 9 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{x} + y = 0, \\ x^2 + 2y = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0, \\ x^2 - 7xy + 3y^2 - x + 4y - 11 = 0: \end{cases}$$

x ***և*** y ***երկու փոփոխականներով երկու հավասարումների համակարգի լուծում*** անվանում են $(x_0; y_0)$ թվազույգը, որն այդ համակարգի յուրաքանչյուր հավասարման լուծում է:

Դիցուք, տրված են x, y և z երեք անհայտներով երեք ռացիոնալ հավասարումներ: Ասում են, որ ***պետք է լուծել*** x, y ***և*** z ***երեք փոփոխականներով երեք ռացիոնալ հավասարումների համակարգը,*** եթե պահանջվում է գտնել բոլոր այն $(x; y; z)$ թվերի եռյակը, որոնք միաժամանակ այդ երեք հավասարումների լուծումներն են:

Ահա x, y և z երեք անհայտներով երեք ռացիոնալ հավասարումների համակարգերի ***օրինակներ.***

$$\begin{cases} 3x + y - z + 1 = 0, \\ 2x - z + 7 = 0, \\ 7x - 3y + z + 11 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x + y - 2z + 1 = 0, \\ x - y - 9z + 7 = 0, \\ 3x^2 - 2xy - y^2 - 7y + 11 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{y} + \dfrac{z}{x} + y - 5 = 0 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{y} = 1 \\ 2x + 3y - z^2 = 0: \end{cases}$$

x, y ***և*** z ***երեք անհայտներով երեք հավասարումների համակարգի լուծում*** անվանում են դրանցից յուրաքանչյուրի համար լուծում հանդիսացող $(x_0; y_0; z_0)$ թվերի եռյակը:

Նման ձևով սահմանվում է n անհայտներով n ռացիոնալ հավասարումների համակարգը և դրա լուծումը:

Լուծել հավասարումների համակարգը, նշանակում է գտնել դրա բոլոր լուծումները կամ ցույց տալ, որ լուծումներ չկան:

VIII դասարանում արդեն դիտարկել ենք երկու և երեք անհայտներով գծային հավասարումների համակարգերի լուծման եղանակները: Հաջորդ պարագրաֆում օրինակներով ցույց կտանք՝ ինչպես կարելի է լուծել առաջին և երկրորդ աստիճանի հավասարումների համակարգերը: Բացի այդ, կդիտարկվեն խնդիրներ, որոնց լուծումը բերվում է ռացիոնալ հավասարումների համակարգերի լուծման: Ընդ որում՝ կգտնենք «Հանրահաշիվ 7» դասագրքի «Գծային հավասարումներ» գլխում գծային հավասարումների համակարգերի համարժեքության մասին բերված պնդումներից:

270°. ա) Ո՞ր հավասարումներն են անվանում ռացիոնալ:

բ) Ո՞ր հավասարումներն են անվանում առաջին և երկրորդ աստիճանների:

գ) Ո՞րն են անվանում x և y երկու անհայտներով հավասարման լուծում:

դ) Ո՞րն են անվանում x, y և z երեք անհայտներով հավասարման լուծում:

ե) Ե՞րբ են ասում, որ պետք է լուծել երկու անհայտներով երկու հավասարումների համակարգը:

զ) Ե՞րբ են ասում, որ պետք է լուծել երեք անհայտներով երեք հավասարումների համակարգը:

է) Ո՞րն են անվանում երկու անհայտով երկու հավասարումների համակարգի լուծում:

ը) Ո՞րն են անվանում երեք անհայտով երեք հավասարումների համակարգի լուծում:

թ) Ի՞նչ է նշանակում լուծել հավասարումների համակարգը:

271. (1; 2) թվազույգը հավասարման լուծո՞ւմ է.

ա) $x + y = 3$; բ) $2x + y = 1$; գ) $3x + 2y = 7$;

դ) $x^2 + y^2 = 3$; ե) $x^2 + y^2 = 5$; զ) $xy - x = 1$:

272. Գտեք հավասարման որևէ լուծում.

ա) $x + y = 5$; բ) $3x + y = 5$; գ) $2x - 3y = 1$;

դ) $x^2 + y^2 = 9$; ե) $x^2 + 2xy + y^2 = 25$; զ) $x^2 + xy = 0$:

273. (0; 1; 2) թվերի եռյակը հավասարման լուծո՞ւմ է.

ա) $3x + 2y + z = 4$; բ) $x - y + z = 1$;

գ) $x + 2y + 3z = 2$; դ) $xy + 2xz + yz = 2$;

ե) $x^2 + y^2 + z^2 = 5$; զ) $x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$:

274. Գտեք հավասարման որևէ լուծում.

ա) $x + y + z = 10$; բ) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$;

գ) $xy + yx + yz = 3$; դ) $xy - yx + yz = 1$:

275. Ապացուցեք, որ հավասարումը լուծում չունի.

ա) $x^2 + y^2 + 1 = 0$; բ) $x^2 + y^2 + x^2 + 0,1 = 0$:

276. Տրված է $xy + x = 8$ հավասարումը.

ա) Ի՞նչ աստիճանի է այդ հավասարումը:

բ) x-ը արտահայտեք y-ով: Ի՞նչ արժեքներ չի կարող ընդունել y-ը:
գ) Արտահայտեք y-ը x-ով: Ի՞նչ արժեքներ չի կարող ընդունել x-ը:

277. Որոշեք հավասարման աստիճանը.
ա) $2x - 5y = 7$;
բ) $x + x^2 - xy - 5 = 0$;
գ) $xy = 4$;
դ) $x^2 - xy^2 + 7x = 0$;
ե) $xy^2 - x^3y + 3 = 0$;
զ) $x^6 - x^8 - x^{10} = 0$:

278. (1; 1) թվազույգը հավասարումների համակարգի լուծո՞ւմ է.
ա) $\begin{cases} x + y = 2, \\ x^2 - xy + y^2 = 1; \end{cases}$
բ) $\begin{cases} xy + x^2 = 2, \\ 2x + 3y = 4; \end{cases}$
գ) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ 2x - y = 1; \end{cases}$
դ) $\begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ x + 2xy = 3: \end{cases}$

279. (1; 1; 1) թվերի եռյակը հավասարումների համակարգի լուծո՞ւմ է.
ա) $\begin{cases} x + y + z = 3, \\ 3x - 2y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3; \end{cases}$
բ) $\begin{cases} x + y + z = 3, \\ xy + xz + yz = 3, \\ x^2 + x - y = 1; \end{cases}$
գ) $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 8, \\ xy - 3x^2 + z = -1, \\ x^2 + y^2 - z^2 = 1; \end{cases}$
դ) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2, \\ x + y + z = 3, \\ xy + yz = 2: \end{cases}$

280. Տրված թվազույգը՝
$$\begin{cases} x^2 + xy - 3 = 0, \\ x + 5 = y, \end{cases}$$
համակարգի լուծո՞ւմ է.
ա) (0; 3); բ) (–3; 2); գ) (2; –3); դ) (0,5; 5,5):

281. Տրված թվերի եռյակը՝
$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x - y - z = -2, \\ xy + x^2 = 2, \end{cases}$$
համակարգի լուծո՞ւմ է.
ա) (1; –1; 1); բ) (1; 1; 1); գ) (1; 1; –1); դ) (–1; 1; 1):

5.2 Առաջին և երկրորդ աստիճանի հավասարումների համակարգեր

Այստեղ կդիտարկենք երկու անհայտով երկու հավասարումների համակարգերի լուծման օրինակներ, որոնցից մեկն առաջին աստիճանի է, մյուսը՝ երկրորդ, և երեք անհայտով երեք հավասարումների համակարգերի օրինակներ, որոնցից երկուսն առաջին աստիճանի են, երրորդը՝ երկրորդ աստիճանի: Այդ համակարգերի լուծման համար կիրառենք տեղադրման եղանակը:

ՕՐԻՆԱԿ 1. Լուծենք

$$\begin{cases} x + 2y - 7 = 0, \\ x^2 + 2xy + y^2 + 3y + 4x - 31 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

հավասարումների համակարգը:

Այս համակարգի առաջին հավասարումն առաջին աստիճանի հավասարում է: Դրանից x-ը արտահայտենք y-ով.

$$x = 7 - 2y: \qquad (2)$$

x-ի փոխարեն տեղադրելով $(7 - 2y)$ արտահայտությունը երկրորդ հավասարման մեջ՝ կստանանք

$$(7 - 2y)^2 + 2(7 - 2y)y + y^2 + 3y - 4(7 - 2y) - 31 = 0$$

հավասարումը, որը նման անդամների միացումից հետո բերվում է

$$y^2 - 3y - 10 = 0 \qquad (3)$$

տեսքի: (3) հավասարումն ունի երկու արմատ՝ $y_1 = -2$ և $y_2 = 5$: Տեղադրելով այս թվերը (2) հավասարման մեջ y-ի փոխարեն՝ կստանանք

$$x_1 = 11 \text{ և } x_2 = -3:$$

Այսպիսով, (1) համակարգն ունի երկու լուծում՝

$$x_1 = 11,\ y_1 = -2;\ x_2 = -3,\ y_2 = 5,$$

և այլ լուծումներ չունի:

Նման ձևով կարելի է լուծել x և y անհայտներով: Երկու հավասարումների ցանկացած համակարգ, որում հավասարումներից մեկն առաջին աստիճանի է, մյուսը՝ երկրորդ: Առաջին աստիճանի հավասարումից x-ը (կամ y-ը) արտահայտում ենք մյուս անհայտով և այդ արտահայտությունը տեղադրում երկրորդ աստիճանի հավասարման մեջ: Ստանում ենք y (կամ x) անհայտով քառակուսային հավասարում: Եթե քառակուսային հավասարումն ունի արմատներ, ապա համակարգը նույնպես ունի լուծումներ, իսկ եթե ոչ, ապա համակարգը լուծումներ չունի:

ՕՐԻՆԱԿ 2: Լուծենք

$$\begin{cases} 3x - y + 9 = 0 \\ x^2 - y^2 - y - 5x - 32 = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

հավասարումների համակարգը:

(4) համակարգի առաջին հավասարումն առաջին աստիճանի հավասարում է, իսկ երկրորդը՝ երկրորդ:

Առաջին հավասարումից y-ը արտահայտենք x-ով՝

$$y = 3x + 9:$$

(4) համակարգի երկրորդ հավասարման մեջ y-ի փոխարեն տեղադրենք $(3x + 9)$ արտահայտությունը: Կստանանք

$$x^2 - (3x + 9)^2 + (3x + 9) - 5x - 32 = 0$$

հավասարումը, որը նման անդամների միացումից հետո կգրենք

$$-8x^2 - 56x - 104 = 0$$

տեսքով:

Կրճատելով հավասարման երկու մասը (-8)-ով՝ կստանանք դրան համարժեք

$$x + 7x + 13 = 0 \qquad (5)$$

քառակուսային հավասարումը, որի տարբերիչը՝

$$\mathrm{D} = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = - 3 < 0:$$

Հետևաբար, (5) հավասարումը լուծում չունի: Ուստի, (4) համակարգը լուծում չունի:

ՕՐԻՆԱԿ 3. Լուծենք

$$\begin{cases} x + y - z + 1 = 0, \\ x - y - z + 3 = 0, \\ x^2 + 2xy + y^2 - xz + z^2 + x - 5 = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

հավասարումների համակարգը:

(6) համակարգի առաջին հավասարումից y-ը արտահայտենք x և z-ով.

$$y = z - x - 1: \qquad (7)$$

$(z - x - 1)$ արտահայտությունը տեղադրելով (6) համակարգի երկրորդ և երրորդ հավասարումներում y-ի փոխարեն՝ կստանանք x և z անհայտներով երկու հավասարումների համակարգ՝

$$\begin{cases} x - (z - x - 1) - z + 3 = 0 \\ x^2 + 2x(z - x - 1) + (z - x - 1)^2 - xz + z^2 + x - 5 = 0, \end{cases}$$

որը նման անդամների միացումից հետո ունի

$$\begin{cases} 2x - 2z + 4 = 0, \\ 2z^2 - xz + x - 2z - 4 = 0 \end{cases} \tag{8}$$

տեսքը:

(8) համակարգի առաջին հավասարումից x-ը արտահայտենք z-ով.

$$x = z - 2: \tag{9}$$

(8) համակարգի երկրորդ հավասարման մեջ x-ի փոխարեն տեղադրելով $(z - 2)$ արտահայտությունը՝ կստանանք մեկ z անհայտով հավասարում՝

$$2z^2 - z(z - 2) + (z - 2) - 2z - 4 = 0,$$

որը պարզեցումներից հետո գրենք

$$z^2 + z - 6 = 0 \tag{10}$$

տեսքով:

(10) քառակուսային հավասարումն ունի երկու արմատ.

$$z_1 = -3 \text{ և } z_2 = 2:$$

Տեղադրելով այս թվերը (9) հավասարության մեջ՝ կստանանք $x_1 = -5$ և $x_2 = 0$:

Վերջապես տեղադրելով x_1 և z_1, այնուհետև x_2 և z_2 թվերը (7) հավասարության մեջ, կստանանք

$$y_1 = 1 \text{ և } y_2 = 1:$$

Հետևաբար, (6) համակարգն ունի երկու լուծում՝

$$x_1 = -5,\ y_1 = 1,\ z_1 = -3,$$

$$x_2 = 0,\ y_2 = 1,\ z_2 = 2,$$

և այլ լուծումներ չունի:

Դիտողություն: Տեղադրման եղանակը կիրառելի է նաև ռացիոնալ հավասարումների որոշ համակարգերի լուծման համար: Օրինակ՝

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1 \end{cases}$$

համակարգի լուծման համար անհրաժեշտ է առաջին հավասարումից y-ը արտահայտել x-ով և $(1 - x)$-ը y-ի փոխարեն տեղադրել երկրորդ հավասարման մեջ, իսկ այնուհետև լուծել մեկ անհայտով՝

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x - 1} = 1,$$

ռացիոնալ հավասարումը:

Նշենք նաև, որ ռացիոնալ հավասարումների համակարգեր լուծելիս երբեմն կիրառվում են նաև լուծման այլ եղանակներ:

282.° Ինչպես կարելի է լուծել առաջին և երկրորդ աստիճանի հավասարումների համակարգը:

Լուծեք հավասարումների համակարգը (283-292).

283. ա) $\begin{cases} x^2 = y, \\ y - 2 = 2; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} y^2 - 1 = x, \\ x - 13 = 11; \end{cases}$ գ) $\begin{cases} x - 3 = 2, \\ y^2 - x = 4; \end{cases}$

դ) $\begin{cases} x^2 - y - 4 = 0, \\ y - 4 = 1; \end{cases}$ ե) $\begin{cases} x = 2 + y, \\ x^2 - y = 8; \end{cases}$ զ) $\begin{cases} x^2 = y, \\ 5x - y = 6; \end{cases}$

է) $\begin{cases} x = y - 2, \\ xy = 3; \end{cases}$ ը) $\begin{cases} y = x - 8, \\ xy = -7; \end{cases}$ թ) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ x + 2 = 3: \end{cases}$

284. ա) $\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = -40; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x + y = 7, \\ xy = 12; \end{cases}$ գ) $\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = -28; \end{cases}$

դ) $\begin{cases} x + y = -8, \\ xy = 15; \end{cases}$ ե) $\begin{cases} xy = -15, \\ x - y = -8; \end{cases}$ զ) $\begin{cases} xy = 8, \\ x - y = 2; \end{cases}$

է) $\begin{cases} x + 2y = 4, \\ x^2 + y = 16; \end{cases}$ ը) $\begin{cases} 3x + y = 1, \\ x + y^2 = 1; \end{cases}$ թ) $\begin{cases} x + 2y = 3, \\ 3x - y^2 = 17: \end{cases}$

285. ա) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 41, \\ y - x = 1; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ y - x = -1; \end{cases}$ գ) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ x + y = 1; \end{cases}$

դ) $\begin{cases} x - y = 2, \\ x^2 - y^2 = 8; \end{cases}$ ե) $\begin{cases} x + y = -6, \\ y^2 - x^2 = 3; \end{cases}$ զ) $\begin{cases} x - y = -3, \\ y^2 - x^2 = -1: \end{cases}$

286. ա) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ y + x = 0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ y - x = 0; \end{cases}$ գ) $\begin{cases} x + y = 0{,}2, \\ x^2 - y^2 = 2; \end{cases}$

դ) $\begin{cases} x - y = 0{,}6, \\ y^2 - x^2 = 12; \end{cases}$ ե) $\begin{cases} x - y = 11, \\ xy = 12; \end{cases}$ զ) $\begin{cases} y - x = 4, \\ xy = 5; \end{cases}$

է) $\begin{cases} xy = 12, \\ y + x = 1; \end{cases}$ ը) $\begin{cases} xy = 15, \\ x + y = -5; \end{cases}$ թ) $\begin{cases} x - y = 2, \\ xy = -13; \end{cases}$

ժ) $\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 0; \end{cases}$ ի) $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy = 0; \end{cases}$ լ) $\begin{cases} xy = 5, \\ x - y = 0: \end{cases}$

287. ա) $\begin{cases} x + y - 7 = 0, \\ x^2 + xy + y^2 = 43; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x + y - 6 = 0, \\ 2x^2 - y^2 = -23; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 - y^2 - 4xy + 11 = 0; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} x + y = 12, \\ 2xy = 9(x - y); \end{cases}$

ե) $\begin{cases} 9x^2 - 12x + 4y^2 + 4y = 15, \\ 3x + 2y = 3; \end{cases}$ զ) $\begin{cases} 9x^2 - 30x - 16y^2 - 24y = 0, \\ 3x - 4y = 6; \end{cases}$

է) $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + x + y - 2 = 0, \\ x - y = 2; \end{cases}$ ը) $\begin{cases} x + y = 1, \\ x^2 - 2y^2 + xy - x - y + 4 = 0: \end{cases}$

288. ա) $\begin{cases} x + y = 2, \\ 9x^2 - 3xy + y = 1; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x - 3y = 1, \\ 2xy - x^2 + 9y^2 = 11 - 4x; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} 2x + y = 1, \\ 3x^2 = (y - 2)^2 - 2x; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} x - 4y = 10, \\ (x - 1)^2 = 7(x + y) + 1; \end{cases}$

ե) $\begin{cases} 7x - y = 2, \\ 14xy - 5y^2 - 7x + 9 = 8y; \end{cases}$ զ) $\begin{cases} x - y = 2, \\ 3x^2 - 5yx + 8y^2 - 3x + 4y = 15; \end{cases}$

է) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 - 2xy + 4y = 2; \end{cases}$ ը) $\begin{cases} x + y = 2, \\ x^2 + 3xy - y^2 + 4y = 1: \end{cases}$

289. ա) $\begin{cases} x + y + z = 6, \\ y + z = 3, \\ z = 1; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x + z = 2, \\ x = -1; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ x + z = 1, \\ x + y = 3; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ y + z = 3, \\ x + y = 1; \end{cases}$

ե) $\begin{cases} x + y + z = -1, \\ x + 2y = -1, \\ x - y = 5; \end{cases}$ զ) $\begin{cases} x + y + z = -1, \\ 2y + z = 4, \\ y - z = 5; \end{cases}$

է) $\begin{cases} x + y + z = -1, \\ x - y + z = 7, \\ x + y = -3; \end{cases}$ ը) $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x + y - z = -3, \\ y + z = 4; \end{cases}$

թ) $\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x + 2y + 3z = 6, \\ 2x - y + z = 2; \end{cases}$ ժ) $\begin{cases} x + y + z = -3, \\ x - y + z = -1, \\ x + 2y - z = -2: \end{cases}$

290. ա) $\begin{cases} x + 2y - z = 1, \\ 2x - y + 2z = -1, \\ 3x - 2y + z = 3; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x + 2y - z = 2, \\ 3x - 2y + z = 2, \\ 4x + 4y + z = 15; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} x - y - z = -2, \\ x + 2y + z = 3, \\ 2x + y - 3z = 7; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} x + 3y - z = 8, \\ 2x + 4y + z = 3, \\ x + 9y + 4z = 5; \end{cases}$

ե) $\begin{cases} 2x - 3y + z - 10 = 0, \\ 3x - 4y - z + 2 = 0; \\ x + y + z = 0; \end{cases}$ զ) $\begin{cases} x - 3y + 2z = 1, \\ x - y - z = 2; \\ x + y + z = 0: \end{cases}$

291. ա) $\begin{cases} x - y = -1, \\ y + z = 5, \\ xz = 3; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x + y = -3, \\ y - z = 1, \\ x^2 + z^2 = 10; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 35, \\ x + y = 2, \\ x - z = 4; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ x + y + z = 12, \\ xy = 12; \end{cases}$

ե) $\begin{cases} 4x - 2y = 7x, \\ y + z = x, \\ y^2 - 4 = 8x - 3z^2; \end{cases}$ զ) $\begin{cases} 3y + z = x, \\ x - z = y, \\ x^2 - 3x = 5 + z^2: \end{cases}$

292*. ա) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1\dfrac{1}{2}, \\ x - 1 = 1; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = -\dfrac{1}{4}, \\ y + 1 = 3; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = 1\dfrac{1}{6}, \\ x - y = -1; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{5}{6}, \\ x + y = 5; \end{cases}$

ե) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = -\dfrac{1}{6}, \\ x + y = 1; \end{cases}$ զ) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = -\dfrac{1}{12}, \\ x - y = 1; \end{cases}$

է) $\begin{cases} \dfrac{2}{y} - \dfrac{3}{x} = -8, \\ 3x + y = 3; \end{cases}$ ը) $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = -1\dfrac{5}{12}, \\ x - y = 1; \end{cases}$

թ) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = -2; \end{cases}$ ժ) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = 2\dfrac{1}{6}; \end{cases}$

ի) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{6}, \\ x^2 - y^2 = 5; \end{cases}$ լ) $\begin{cases} x + xy + y = 11, \\ x - xy + y = 1: \end{cases}$

5.3 Խնդիրների լուծում առաջին և երկրորդ աստիճանի հավասարումների համակարգերի օգնությամբ

Խնդիր. Երեք լուծույթներում աղաթթվի տոկոսային պարունակությունները (ըստ զանգվածի) այնպիսին են, որ երկրորդի քառակուսին հավասար է առաջինի և երրորդի արտադրյալին: Եթե առաջին, երկրորդ և երրորդ համաձուլվածքները խառնվեն 2 : 3 : 4 հարաբերությամբ (ըստ զանգվածի), ապա ստացված լուծույթը կպարունակի 32% աղաթթու: Իսկ եթե դրանք խառնենք 3 : 2 : 1 հարաբերությամբ (ըստ զանգվածի), ապա կստացվի 22% աղաթթվի պարունակությամբ լուծույթ: Քանի՞ տոկոս աղաթթու է պարունակում յուրաքանչյուր լուծույթը:

Լուծում: Դիցուք, առաջին լուծույթում աղաթթուն x% է, երկրորդում՝ y%, երրորդում՝ z%: Ըստ խնդրի առաջին պայմանի՝

$$y^2 = x \cdot z: \qquad (1)$$

Առաջին լուծույթի 1 գ-ում պարունակվում է $\frac{x}{100}$ գ աղաթթու, երկրորդ լուծույթի 1 գ-ում՝ $\frac{y}{100}$ գ, երկրորդ լուծույթի 1 գ-ում՝ $\frac{z}{100}$ գ:

Եթե վերցնենք 2 գ առաջին լուծույթից, 3 գ երկրորդից և 4 գ երրորդից, ապա կստանանք 9 գ խառնուրդ, որը պարունակում է

$$2 \cdot \frac{x}{100} + 3 \cdot \frac{y}{100} + 4 \cdot \frac{z}{100} \text{ գ աղաթթու:}$$

Ըստ խնդրի պայմանի՝ ստացված խառնուրդը պարունակում է 32% աղաթթու, այսինքն՝ 9 գ խառնուրդում պարունակվում է $9 \cdot \frac{32}{100}$ գ աղաթթու: Այս պայմանից ստանում ենք

$$2 \cdot \frac{x}{100} + 3 \cdot \frac{y}{100} + 4 \cdot \frac{z}{100} = 9 \cdot \frac{32}{100} \qquad (2)$$

հավասարումը:

Դատելով նույն կերպ՝ ստանում ենք ևս մեկ հավասարում.

$$3 \cdot \frac{x}{100} + 2 \cdot \frac{y}{100} + 1 \cdot \frac{z}{100} = 6 \cdot \frac{22}{100}: \qquad (3)$$

Մենք տեսնում ենք, որ որոնելի x, y և z թվերը միաժամանակ բավարարում են (1), (2) և (3) հավասարումներին: Հետևաբար, խնդիրը լուծելու համար անհրաժեշտ է լուծել (1), (2) և (3) հավասարումներից բաղկացած x, y և z երեք անհայտով համակարգը: Արտագրենք այդ համակարգը հետևյալ տեսքով՝

$$\begin{cases} y^2 = xz \\ 2x + 3y + 4z = 288 \\ 3x + 2y + z = 132, \end{cases} \qquad (4)$$

և լուծենք այն: (4) համակարգի երրորդ հավասարումից z-ը արտահայտենք x և y-ով.

$$z = 132 - 3x - 2y: \qquad (5)$$

Տեղադրելով $(132 - 3x - 2y)$ արտահայտությունը z-ի փոխարեն (4) համակարգի առաջին և երկրորդ հավասարումներում՝ կստանանք x և y երկու անհայտով հավասարումների համակարգ.

$$\begin{cases} y^2 = x\,(132 - 3x - 2y) \\ 2x + 3y + 4(132 - 3x - 2y) = 288: \end{cases}$$

Յուրաքանչյուր հավասարման մեջ տեղափոխելով բոլոր անդամները ձախ կողմ և կատարելով նման անդամների միացում՝ ստանում ենք

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 + 2xy - 132x = 0 \\ 240 - 10x - 5y = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

համակարգը:

(6) համակարգի երկրորդ հավասարումից y-ը արտահայտենք x-ով՝

$$y = 48 - 2x, \qquad (7)$$

և $(48 - 2x)$ արտահայտությունը y-ի փոխարեն տեղադրենք (6) համակարգի առաջին հավասարման մեջ: Կստանանք մեկ x անհայտով

$$3x^2 + (48 - 2x)^2 + 2x(48 - 2x) - 132x = 0$$

հավասարումը, որը նման անդամների միացումից հետո կգրենք

$$3x^2 - 228x + 2304 = 0$$

տեսքով: Հավասարման երկու մասը բաժանելով 3-ի՝ կստանանք դրան համարժեք

$$x^2 - 76x + 768 = 0 \qquad (8)$$

քառակուսային հավասարումը:

Հաշվենք այդ հավասարման տարբերիչը.

$$D = b^2 - 4ac = (-76)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 768 = 52^2 > 0:$$

Նշանակում է՝ (8) հավասարումն ունի երկու արմատ.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{76 \pm 52}{2}, \text{ այսինքն՝ } x_1 = 64 \text{ և } x_2 = 12:$$

Տեղադրելով x_1-ը և x_2-ը (7) արտահայտության մեջ՝ գտնում ենք, որ

$$y_1 = -80 \text{ և } y_2 = 24:$$

Տեղադրելով $(x_1,\ y_1)$ և $(x_2,\ y_2)$ թվազույգերը (5) արտահայտության մեջ՝ գտնում ենք, որ $z_1 = 100$ և $z_2 = 48$:

Այսպիսով, (4) համակարգն ունի երկու լուծում՝

$$x_1 = 64,\ y_1 = -80,\ z_1 = 100$$

և

$$x_2 = 12,\ y_2 = 24,\ z_2 = 48,$$

բայց, ըստ ենթադրության, y-ը երկրորդ լուծույթում աղաթթվի տոկոսն է, և հետևաբար, y-ը չի կարող լինել բացասական թիվ: Ուստի, խնդրի պայմանին բավարարում է միայն մեկ լուծում.

$$x_2 = 12,\ y_2 = 24,\ z_2 = 48:$$

Պատասխան՝ Առաջին լուծույթը պարունակում է 12% աղաթթու, երկրորդը՝ 24% երրորդը՝ 48%:

293. ա) 171-ը ներկայացրեք երկու արտադրիչների արտադրյալի տեսքով, որոնց գումարը 28 է:
բ) 231-ը ներկայացրեք երկու արտադրիչների արտադրյալով, որոնց տարբերությունը 10 է:
գ) Երկու թվերի գումարը 3 է, իսկ քառակուսիների գումարը՝ 65: Գտեք այդ թիվը:
դ) Տրված երկու թվերի և դրանց քառակուսիների տարբերությունները 11 է: Գտեք այդ թվերը:

294. ա) Ուղղանկյան պարագիծը 25 մ է, իսկ մակերեսը՝ 34 մ^2: Գտեք ուղղանկյան կողմերը:
բ) Ուղղանկյան պարագիծը 10,6 սմ է, իսկ մակերեսը՝ 6,72 սմ^2: Գտեք ուղղանկյան կողմերը:
գ) Ուղղանկյան կողմերից մեկը 4 դմ-ով մեծ է մյուսից, իսկ ուղղանկյան կողմերի վրա կառուցված քառակուսիների մակերեսների գումարը 52 դմ^2 է: Գտեք ուղղանկյան կողմերը:
դ) Կազմեք նախորդ խնդրի նման խնդիր և լուծեք այն:

295. ա) Եթե ուղղանկյան կողմերից մեկը մեծացվի 5 մ-ով, մյուսը՝ 4-ով, ապա ուղղանկյան մակերեսը կմեծանա 113 մ^2-ով: Իսկ եթե առաջին կողմը մեծացվի 4 մ-ով, իսկ երկրորդը՝ 5-ով, ապա մակերեսը կմեծանա 116 մ^2-ով: Գտեք ուղղանկյան երկարությունը և լայնությունը:
բ) Եթե ուղղանկյան երկարությունը մեծացվի 3 մ-ով, իսկ լայնությունը փոքրացվի 2-ով, ապա ուղղանկյան մակերեսը չի փոխվի: Մակերեսը չի փոխվի նաև այն դեպքում, երբ երկարությունը փոքրացվի 2 մ-ով, իսկ լայնությունը ավելացվի 3-ով: Գտեք ուղղանկյան երկարությունը և լայնությունը:

296. ա) Երկու բանվոր մեկ հերթափոխում պատրաստեցին 72 դետալ: Եթե առաջին բանվորն իր աշխատանքի արտադրողականությունն ավելացնի 15 %-ով, իսկ երկրորդը՝ 25 %-ով, ապա մեկ հերթափոխում միասին կպատրաստեն 86 դետալ: Քանի դետալ պատրաստեց բանվորներից յուրաքանչյուրը մեկ հերթափոխում:

բ) Երկու հեծանվորդների հեռավորությունը 50 մ է: Նրանք միաժամանակ շարժվում են նույն ուղղությամբ և 50 վրկ հետո երկրորդ հեծանվորդը հասնում է առաջինին: Եթե առաջին հեծանվորդը երկրորդից 5 վրկ շուտ շարժվեր, ապա երկրորդն առաջինին կհասներ առաջինի շարժումը սկսելուց 75 վրկ հետո: Վայրկյանում քանի՞ մետր է անցնում երկրորդ հեծանվորդը:

5.4 Խնդիրների լուծում ռացիոնալ հավասարումների համակարգերի օգնությամբ

Խնդիր 1. Բանվորների առաջին բրիգադը սկսեց խրամատ փորել: 3 օր հետո նրանց միացավ երկրորդ բրիգադը, և պահանջվեց ևս 8 օրվա համատեղ աշխատանք խրամատը մինչև վերջ փորելու համար: Իսկ եթե հակառակը՝ առաջին երեք օրն աշխատեր միայն երկրորդ բրիգադը, ապա աշխատանքն ավարտելու համար երկու բրիգադներին կպահանջվեր ևս 9 օր:

Յուրաքանչյուր բրիգադ, աշխատելով առանձին, որքա՞ն ժամանակում կավարտեր ամբողջ աշխատանքը:

Լուծում: Դիցուք, առաջին բրիգադն ամբողջ աշխատանքը կարող է կատարել x օրում, իսկ երկրորդը՝ y օրում: Այդ դեպքում 1 օրում առաջին բրիգադը կատարում է ամբողջ աշխատանքի $\frac{1}{x}$ մասը, իսկ երկրորդը՝ $\frac{1}{y}$:

Առաջին դեպքում առաջին բրիգադը 11 օրում կատարում է ամբողջ աշխատանքի $11 \cdot \frac{1}{x}$ մասը, իսկ երկրորդը 8 օրում՝ $8 \cdot \frac{1}{y}$ մասը: Քանի որ միասին նրանք կատարել են ամբողջ աշխատանքը, ապա

$$11 \cdot \frac{1}{x} + 8 \cdot \frac{1}{y} = 1: \qquad (1)$$

Երկրորդ դեպքում առաջին բրիգադը կաշխատեր 9 օր և կկատարեր ամբողջ աշխատանքի $9 \cdot \frac{1}{x}$ մասը, իսկ երկրորդը՝ 12 օր և կկատարեր ամբողջ աշխատանքի $2 \cdot \frac{1}{y}$ մասը: Համատեղ նրանք կկատարեին ամբողջ աշխատանքը, այսինքն՝

$$9 \cdot \frac{1}{x} + 12 \cdot \frac{1}{y} = 1: \qquad (2)$$

Այսպիսով, որոնելի x և y թվերը բավարարում են (1) և (2) հավասարումներին, այսինքն՝ խնդիրը լուծելու համար անհրաժեշտ է լուծել երկու անհայտով երկու ռացիոնալ հավասարումների՝

$$\begin{cases} 11 \cdot \frac{1}{x} + 8 \cdot \frac{1}{y} = 1 \\ 9 \cdot \frac{1}{x} + 12 \cdot \frac{1}{y} = 1, \end{cases} \qquad (3)$$

համակարգը:

Այս համակարգը լուծելու համար անհրաժեշտություն չկա յուրաքանչյուր հավասարումը բերել այնպիսի տեսքի, որտեղ ձախ մասում հանրահաշվական կոտորակ է, աջ մասում՝ զրո: Տվյալ դեպքում դա միայն կբարդացնի խնդրի լուծումը: Այստեղ հարմար է $\frac{1}{x}$-ը և $\frac{1}{y}$-ը դիտարկել որպես նոր փոփոխություններ:

(3) համակարգը լուծենք որպես $\frac{1}{x}$ և $\frac{1}{y}$ երկու անհայտներով գծային հավասարումների համակարգ: (3)-ի առաջին հավասարումից $\frac{1}{y}$-ը արտահայտենք $\frac{1}{x}$-ով՝

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{8} - \frac{11}{8} \cdot \frac{1}{x}, \qquad (4)$$

և $\left(\frac{1}{8} - \frac{11}{8} \cdot \frac{1}{x}\right)$ արտահայտությունը տեղադրենք (3) համակարգի երկրորդ հավասարման մեջ $\frac{1}{y}$-ի փոխարեն:

Կստանանք

$$9 \cdot \frac{1}{x} + 12 \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{11}{8} \cdot \frac{1}{x}\right) = 1$$

հավասարումը, որտեղից $\frac{1}{x} = \frac{1}{15}$: Տեղադրելով (4) արտահայտության մեջ $\frac{1}{x}$-ի փոխարեն $\frac{1}{15}$, գտնում ենք, որ $\frac{1}{y} = \frac{1}{30}$: Այժմ պարզ է, որ $x = 15$, իսկ $y = 30$:

Պատասխան՝ Առաջին բրիգադն ամբողջ աշխատանքը կկատարեր 15 օրում, երկրորդը՝ 30:

Դիտողություն: Խնդիր 1-ը լուծելիս նշվեց, որ $\frac{1}{x}$-ը և $\frac{1}{y}$-ը կարելի է դիտարկել որպես նոր փոփոխականներ: Հարմար է դրանք նշանակել նոր տառերով՝ $u = \frac{1}{x}$ և $\upsilon = \frac{1}{y}$, և համակարգը լուծել u-ի և υ-ի նկատմամբ, այնուհետև գտնել x-ը և y-ը: Կարելի էր նաև հենց ամենասկզբից u և υ-ով նշանակել աշխատանքի այն մասը, որը համապատասխանաբար կատարում է բրիգադներից յուրաքանչյուրը մեկ օրում: Այդ դեպքում համակարգն ավելի պարզ տեսք կունենար:

Խնդիր 2: Երկու կետեր շարժվում են շրջանագծով նույն ուղղությամբ: Շրջանագծի երկարությունը 24 մ է: Առաջին կետը մեկ լրիվ պտույտը կատարում է երկրորդից 9 րոպեով շուտ և յուրաքանչյուր 4 րոպեն մեկ հասնում է երկրորդին: Գտեք այդ կետերի արագությունները:

Լուծում: Դիցուք, առաջին կետի արագությունը x մ/ր է, երկրորդինը՝ y մ/ր: Այդ դեպքում առաջին կետը լրիվ պտույտը կկատարի $\frac{24}{x}$ ր-ում, իսկ երկրորդը՝ $\frac{24}{y}$: Քանի որ առաջին կետը ամբողջ շրջանագիծն անցնում է 9 ր-ով երկրորդից շուտ, ապա

$$\frac{24}{y} = \frac{24}{x} + 9: \qquad (5)$$

Խնդրի երկրորդ պայմանը նշանակում է, որ 4 ր-ում առաջին կետը 24 մ-ով ավելի է անցնում, քան երկրորդը.

$$4x = 4y + 24: \qquad (6)$$

Հետևաբար, x-ի և y-ի որոնելի արժեքները միաժամանակ բավարարում են (5) և (6) հավասարումներին, այսինքն՝ անհրաժեշտ է լուծել երկու անհայտով երկու ռացիոնալ հավասարումների

$$\begin{cases} \frac{24}{y} = \frac{24}{x} + 9 \\ 4x = 4y + 24 \end{cases} \qquad (7)$$

համակարգը:

(7) համակարգի երկրորդ հավասարումից x-ը արտահայտենք y-ով՝

$$x = y + 6, \qquad (8)$$

և $(y + 6)$ արտահայտությունը տեղադրենք (7) համակարգի առաջին հավասարման մեջ x-ի փոխարեն: Կստանանք

$$\frac{24}{y} = \frac{24}{y+6} + 9 \qquad (9)$$

հավասարումը:

(9) հավասարման մեջ բոլոր անդամները տեղափոխենք ձախ կողմ, այնուհետև իրարից հանենք հանրահաշվական կոտորակները: Կստանանք (9)-ին համարժեք

$$\frac{-9y^2 - 54y + 144}{y(y+6)} = 0 \qquad (10)$$

հավասարումը: Այժմ լուծենք

$$-9y^2 - 54y + 144 = 0$$

կամ դրան համարժեք

$$y^2 + 6y - 16 = 0 \qquad (11)$$

հավասարումները: (11) հավասարումն ունի երկու արմատ՝ $y_1 = 2$ և $y_2 = -8$: Քանի որ y_1 և y_2 թվերը (10) հավասարման ձախ մասի հայտարարը զրո չեն դարձնում, ապա դրանք այդ հավասարման արմատներն են: Տեղադրելով y_1-ը և y_2-ը (8) հավասարության մեջ՝ կստանանք $x_2 = -2$ և $x_1 = 8$:

Այսպիսով, (7) համակարգն ունի երկու լուծում.

$$x_1 = 8,\ y_1 = 2 \text{ և } x_2 = -2,\ y_2 = -8:$$

x և y արագությունները դրական թվեր են, ուստի, համակարգի երկրորդ լուծումը չի բավարարում խնդրի պայմանին:

Պատասխան՝ Առաջին կետի արագությունը 8 մ/ր է, երկրորդինը՝ 2 մ/ր:

Խնդիր 3: Որոշակի աշխատանք կատարելու համար երեք բանվորներից յուրաքանչյուրին անհրաժեշտ է որոշակի ժամանակ, ընդ որում՝ երրորդ բանվորը 1 ժ-ով շատ է կատարում ամբողջ աշխատանքը, քան առաջինը: Համատեղ աշխատելով՝ նրանք ամբողջ աշխատանքը կատարում են 1 ժ-ում: Եթե առաջին բանվորն աշխատի 1 ժ և դադարեցնի աշխատանքը, իսկ այնուհետև երկրորդ բանվորն աշխատի 4 ժամ, ապա ամբողջ աշխատանքը կկատարվի: Որքա՞ն ժամանակում բանվոր 0-ից յուրաքանչյուր կկատարի ամբողջ աշխատանքը:

Լուծում: Դիցուք, առաջին բանվորն ամբողջ աշխատանքը կկատարի x ժ-ում, երկրորդը՝ y, երրորդը՝ z: Այդ դեպքում 1 ժ-ում առաջինը կկատարի ամբողջ աշխատանքի $\frac{1}{x}$ մասը, երկրորդը՝ $\frac{1}{y}$, երրորդը՝ $\frac{1}{z}$:
Համատեղ աշխատելով՝ 1 ժ-ում նրանք կկատարեն ամբողջ աշխատանքի $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$ մասը: Բայց, ըստ խնդրի պայմանի, 1 ժ-ում նրանք կատարում են ամբողջ աշխատանքը, հետևաբար՝

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1: \qquad (12)$$

Եթե առաջին բանվորն աշխատի 1 ժամ, երկրորդը՝ 4 ժամ, ապա միասին նրանք կկատարեն ամբողջ աշխատանքի $\left(\frac{1}{x}+4\cdot\frac{1}{y}\right)$ մասը: Ըստ խնդրի պայմանի՝ նրանք կատարում են ամբողջ աշխատանքը, հետևաբար՝

$$\frac{1}{x}+4\cdot\frac{1}{y}=1: \qquad (13)$$

Քանի որ երրորդ բանվորն ամբողջ աշխատանքը 1 ժ-ով արագ է կատարում, քան առաջինը, ապա

$$x=z+1: \qquad (14)$$

Այսպիսով, որոնելի x, y և z թվերը միաժամանակ բավարարում են (12), (13) և (14) հավասարումներին: Հետևաբար, խնդիրը լուծելու համար անհրաժեշտ է լուծել երեք անհայտով երեք ռացիոնալ հավասարումների

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1\\ \frac{1}{x}+4\cdot\frac{1}{y}=1\\ x=z+1\end{cases} \qquad (15)$$

համակարգը:

(15) համակարգի երրորդ հավասարումից z-ը արտահայտենք x-ով՝

$$z=x-1, \qquad (16)$$

(15) համակարգի երկրորդ հավասարումից $\frac{1}{y}$ -ը արտահայտենք x-ով՝

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right): \qquad (17)$$

(15)-ի առաջին հավասարման մեջ z-ի փոխարեն տեղադրելով $(x-1)$ և $\frac{1}{y}$ -ի փոխարեն՝ $\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)$, կստանանք

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x-1}=1 \qquad (18)$$

ռացիոնալ հավասարումը:

Բոլոր անդամները տեղափոխելով ձախ մաս և գումարելով հանրահաշվական կոտորակները՝ կստանանք (18)-ին համարժեք

$$\frac{3x^2-10x+3}{4x(x-1)}=0 \qquad (19)$$

հավասարումը: Այժմ լուծենք

$$3x^2-10x+3=0 \qquad (20)$$

հավասարումը: Այն ունի երկու արմատ՝ $x_1=3$, $x_2=\frac{1}{3}$:

Քանի որ x_1-ը և x_2-ը (19) հավասարման ձախ մասի հայտարարը զրո չեն դարձնում, ապա x_1-ը և x_2-ը (19) հավասարման արմատներ են: Տեղադրելով x_1-ը և x_2-ը (16) և (17-ի) մեջ՝ գտնում ենք $y_1 = 6$, $y_2 = -2$, $z_1 = 2$, $z_2 = \frac{2}{3}$:

Հետևաբար (15) համակարգն ունի երկու լուծում՝ $x_1 = 3$, $y_1 = 6$, $z_1 = 2$ և $x_2 = \frac{1}{3}$, $z_2 = -2$, $z_2 = -\frac{2}{3}$:

Քանի որ x, y և z-ը ամբողջ աշխատանքը կատարելու ժամաքանակներն են, ապա դրանք բացասական թվեր չեն կարող լինել: Ուստի, խնդրի պայմանին բավարարում է

$$x_1 = 3,\ y_1 = 6,\ z_1 = 2$$

լուծումը:

Պատասխան՝ Առաջին բանվորն ամբողջ աշխատանքը կարող է կատարել 3 ժ-ում, երկրորդը՝ 6, երրորդը՝ 2:

297. ա) Եթե առաջին թվի քառակուսուն գումարենք երկրորդ թվի կրկնապատիկը, կստացվի (−7), իսկ եթե առաջին թվից հանենք երկրորդը՝ 11: Գտեք այդ թվերը:
 բ) Գտեք երկու թիվ, որոնց գումարը և տարբերությունը հարաբերում են ինչպես 8 : 1, իսկ քառակուսիների տարբերությունը 128 է: Քանի՞ լուծում ունի խնդիրը:

298. ա) Գտեք երկնիշ թիվ, որի տասնավորների թվանշանը 2-ով մեծ է միավորների թվանշանից, իսկ այդ թվի և թվանշանների արտադրյալը 640 է:
 բ) Գտեք երկնիշ թիվ, որի միավորների թվանշանը 2-ով մեծ է տասնավորների թվանշանից, իսկ այդ թվի և թվանշանների արտադրյալը 144 է:

299. ա) Եթե երկնիշ թիվը բաժանենք դրա թվանշանների արտադրյալի վրա, ապա քանորդում կստացվի 2, մնացորդում՝ 5: Եթե այդ թվի թվանշանները տեղափոխենք և ստացված երկնիշ թիվը բաժանենք դրա թվանշանների գումարի վրա, ապա քանորդում կստացվի 7, մնացորդում՝ 3: Գտեք այդ թիվը:
 բ) Երկնիշ թվի թվանշանների գումարը 9 է: Այդ թվանշանների քառակուսիների գումարը 41 է: Եթե այդ թվից հանենք 9-ը, ապա կստացվի նույն թվանշաններով, բայց հակառակ կարգով գրված թիվ: Գտեք այդ թիվը:

գ) Երկնիշ թվի թվանշանների քառակուսիների գումարը 25 է, իսկ արտադրյալը՝ 12: Գտեք այդ թիվը:
դ) Կազմեք ա) - գ) խնդիրների նման խնդիրներ:

300. ա) Երկու բանվոր համատեղ աշխատելով աշխատանքն ավարտում են 8 ժ-ում: Առաջինը, աշխատելով առանձին, ամբողջ աշխատանքը կարող է ավարտել 12 ժ շուտ, քան երկրորդը: Նրանցից յուրաքանչյուրը, աշխատելով առանձին, քանի՞ ժամում կավարտի ամբողջ աշխատանքը:
բ) Երկու բանվոր համատեղ աշխատելով ամբողջ աշխատանքն ավարտեցին 5 օրում: Եթե առաջին բանվորն աշխատեր երկու անգամ արագ, իսկ երկրորդը՝ երկու անգամ դանդաղ, ապա ամբողջ աշխատանքը կկատարեին 4 օրում: Քանի՞ օրում կարող է այդ աշխատանքը կատարել առաջին բանվորը:

301. ա) Երկու որմնադիր համատեղ աշխատելով կարող են կատարել ամբողջ աշխատանքը 4,8 օրում: Երկրորդ որմնադիրը, աշխատելով առանձին, 4 օրով շուտ կարող է կատարել ամբողջ աշխատանքը, քան առաջինը: Նրանցից յուրաքանչյուրը, աշխատելով առանձին, քանի՞ օրում կկատարի ամբողջ աշխատանքը:
բ) Բերքահավաքին երկու կոմբայն համատեղ աշխատեցին 3 օր: Դրանից հետո աշխատանքն ավարտելու համար առաջին կոմբայնն աշխատեց ևս 4,5 օր: Կոմբայններից յուրաքանչյուրը, աշխատելով առանձին, քանի՞ օրում կավարտի բերքահավաքը, եթե առաջինին դրա համար կպահանջվեր 2 օր քիչ ժամանակ, քան երկրորդին:

302. ա) Մեկ դետալի մշակման վրա առաջին բանվորը ծախսում է 6 րոպեից քիչ ժամանակ, քան երկրորդը: Բանվորներից յուրաքանչյուրը քանի՞ դետալ կմշակի 5 ժ-ում, եթե առաջինն այդ ժամանակամիջոցում մշակում է 25 դետալ ավելի, քան երկրորդը:
բ) Տարբեր հզորությամբ երկու տրակտորներ միասին երկու օրում վարեցին դաշտի $\frac{1}{3}$ մասը: Յուրաքանչյուր տրակտոր առանձին քանի՞ օրում կվարի ամբողջ դաշտը, եթե առաջինին դրա համար կպահանջվեր 5 օր քիչ, քան երկրորդին:

303. ա) Տարբեր հզորության երկու տրակտորներ համատեղ դաշտը կարող են վարել 9 ժ-ում: Եթե միայն առաջին տրակտորն աշխատեր 1,2 ժ, իսկ այնուհետև երկրորդը՝ 2 ժամ, ապա կվարվեր դաշտի

միայն 20%-ը: Քանի՞ ժամ կպահանջվի տրակտորներից յուրաքանչ-յուրին ամբողջ դաշտը վարելու համար:

բ) Երկու ծեփագործների համատեղ աշխատանք ավարտելու համար պահանջվում է 12 ժամ: Եթե սկզբում աշխատանքի կեսը առաջին բանվորը, իսկ այնուհետև մնացած մյուսը, ապա ամբողջ աշխատանքը կավարտվի 25 ժ-ում: Յուրաքանչյուր ծեփագործ, աշխատելով առանձին, քանի՞ ժ-ում կարող է կատարել ամբողջ աշխատանքը:

304. ա) Մեքենագրուհին հաշվարկեց, որ եթե նա օրական 2 էջ ավելի տպի նախատեսված նորմայից, ապա աշխատանքը կավարտի 3 օր շուտ, քան նախատեսված էր: Իսկ եթե նախատեսվածից 4 էջ ավելի տպի, ապա աշխատանքը կավարտի 5 օր շուտ: Քանի՞ էջ պետք է տպագրեր մեքենագրուհին և որքա՞ն ժամանակում:

բ) Երկու ներկարար կարող են սրահի պատերը ներկել 60 ժ-ում: Նրանցից յուրաքանչյուրը առանձին քանի՞ ժ-ում կարող է կատարել ամբողջ աշխատանքը, եթե հայտնի է, որ նրանցից մեկին դրա համար կպահանջվի 22 ժ ավելի, քան մյուսին:

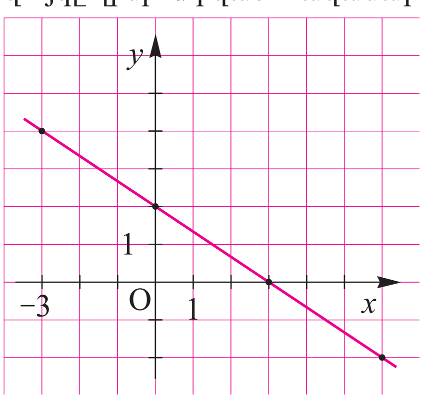
5.5* Հավասարումների ամբողջաթիվ լուծումները

Դիցուք, տրված է երկու անհայտով $n(n \geqslant 1)$-աստիճանի հավասարում, օրինակ՝

$$2x + 3y = 6,\ \ xy - 2y + x = 3,\ \ x^2 - 4xy + 4y^2 = 1:$$

Եթե խնդիր է դրված գտնել այնպիսի x_0 և y_0 ամբողջ թվեր, որ $(x_0; y_0)$ թվազույգը լինի տրված հավասարման լուծում, ապա այդպիսի հավասարումն անվանում են ***դիոֆանտյան հավասարում*** և ասում, որ պահանջվում է գտնել հավասարման ամբողջաթիվ լուծումները: Այդպես անվանում են ի պատիվ հույն մաթեմատիկոս Դիոֆանտի (մ.թ.ա. III դ.), որը հավասարումները լուծում էր ամբողջ թվերով: Երբեմն, խնդրի բովանդակությունից ելնելով, հավասարումները լուծում են բնական թվերով:

Դիտարկենք դիոֆանտյան հավասարումների լուծման մի քանի օրինակներ:



Նկ. 8

ՕՐԻՆԱԿ 1. Լուծենք

$$2x + 3y = 6 \tag{1}$$

գծային դիոֆանտյան հավասարումը:

(1) հավասարումից y-ը արտահայտենք x-ով՝

$$y = 2 - \frac{2}{3}x: \tag{2}$$

Ստացված հավասարումից պարզ է, որ y-ը կլինի ամբողջ թիվ միայն այն դեպքում, երբ x ամբողջ թիվը բաժանվի 3-ի, այսինքն՝ $x = 3x_1$, որտեղ x_1-ը ամբողջ թիվ է: Այդ դեպքում՝

$$y = 2 - 2x_1:$$

Այսպիսով, (1) հավասարման ամբողջ լուծումներ են բոլոր $(3x_1;\ 2 - 2x_1)$ թվազույգերը, որտեղ x_1-ը ցանկացած ամբողջ թիվ է:

Նշենք այս հավասարման որոշ մասնակի լուծումներ:

$x_1 = 0$ դեպքում ունենք $x = 3x_1 = 0$, և $y = 2 - 2x_1 = 2$ և (1) հավասարման լուծում է (0; 2) թվազույգը:

$x_1 = 1$ դեպքում՝ $x = 3x_1 = 3$ և $y = 2 - 2x_1 = 0$, ուստի, (1) հավասարման լուծում է (3; 0) թվազույգը և այլն (նկ. 8):

ՕՐԻՆԱԿ 2. Գտնել

$$xy - 2y + x = 3 \tag{1}$$

հավասարման ամբողջաթիվ լուծումները:

Լուծում: Կատարենք ձևափոխություններ՝

$$xy + x - 2y - 2 = 1,$$
$$x(y + 1) - 2(y + 1) = 1,$$
$$(y + 1)(x - 2) = 1:$$

Քանի որ x-ը և y-ը ամբողջ թվեր են, ապա $y + 1$ և $x - 2$ ամբողջ թվերի արտադրյալը հավասար է 1-ի միայն երկու դեպքում.

$$\begin{cases} y + 1 = 1 \\ x - 2 = 1 \end{cases} \quad \text{կամ} \quad \begin{cases} y + 1 = -1 \\ x - 2 = -1: \end{cases}$$

Առաջին համակարգի լուծումն է (3; 0) թվազույգը, իսկ երկրորդի՝ (1; –2): Այլ ամբողջաթիվ լուծումներ (1) հավասարումը չունի:

ՕՐԻՆԱԿ 3. Ապացուցեք, որ $x^2 - 4x + y^2 + 2y = -5$ հավասարումն ունի մեկ ամբողջաթիվ լուծում:

Լուծում: Ձևափոխենք ձախ մասը.

$$x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 2y + 1 - 1 = -5$$
$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 0:$$

Ակնհայտ է, որ վերջին հավասարման միակ լուծումը $x = 2$, $y = -1$ թվազույգն է:⌋

305. Գտեք հավասարման ամբողջաթիվ լուծումները.
ա) $xy + 5x - 3y = 18$;
բ) $xy - 6x - y + 1 = 0$;
գ) $x^2 - 4y^2 = 5$;
դ) $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 22 = 0$:

306. ա) Ապացուցեք, որ $x^2 - 6x + y^2 + 4y + 13 = 0$ հավասարումն ունի միակ ամբողջաթիվ լուծում:
բ) Ապացուցեք, որ $x^2 - 6x + y^2 + 4y + 14 = 0$ հավասարումը լուծում չունի:
գ) Ապացուցեք, որ $x^2 - 4x + y^2 + 4y + 8 = 0$ հավասարումն ամբողջ թվերով ունի մեկ լուծում:
դ) Ապացուցեք, որ $x^2 - 4x + y^2 + 4y + 9 = 0$ հավասարումը լուծում չունի:

307. Գտեք հավասարման ամբողջաթիվ լուծումները.
ա) $x(x + y) = 3$;
բ) $x^2 + 3xy = 2$;
գ) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$;
դ) $x^2 - 4y^2 = 5$;
ե) $x^2 - 4xy + 3y^2 = -1$;
զ) $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 22 = 0$;
է) $x(x + y) = 7$;
ը) $x(x - 3y) = 2$;
թ) $(x + 2y)(2x - y) = -2$;
ժ) $xy - 2y + x = 3$;
ի) $4x^2 - y^2 = 15$;
լ) $9x^2 + 16y^2 = 25$:

308. ա) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = -5$;
բ) $4x^2 + y^2 - 4x + 6y = -5$;
գ) $xy + 4x - 2y - 11 = 0$;
դ) $xy - 2x - 3y + 1 = 0$:

5.6 Առաջին և երկրորդ աստիճանի հավասարումների համակարգերի լուծման գրաֆիկական եղանակը

Ինչպես առաջին աստիճանի երկու անհայտով երկու հավասարումների համակարգերը, առաջին և երկրորդ աստիճանի հավասարումների համակարգերը նույնպես կարելի է լուծել գրաֆիկական եղանակով:

ՕՐԻՆԱԿ 1. Գրաֆիկական եղանակով լուծենք

$$\begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ x^2 - 2x = y + 3 \end{cases} \qquad (1)$$

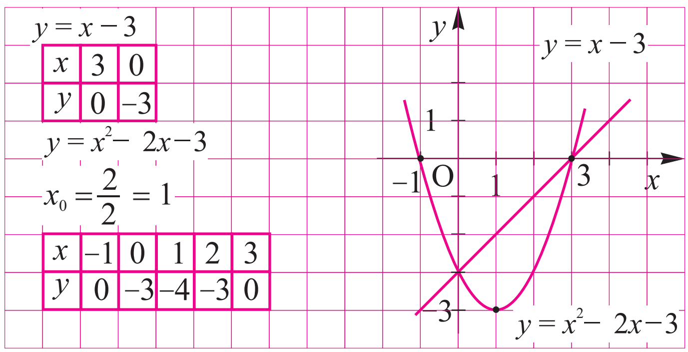
համակարգը:

Այդ հավասարումներից յուրաքանչյուրը լուծելով y-ի նկատմամբ՝ կստանանք

$$\begin{cases} y = x - 3, \\ y = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$$

համակարգը:

Միևնույն կոորդինատային համակարգում կառուցենք $y = x - 3$ ուղիղը և $y = x^2 - 2x - 3$ պարաբոլը (նկ. 99):



Նկ. 99

Դրա համար կազմենք այդ ֆունկցիաների արժեքների աղյուսակները (x_0-ն պարաբոլի գագաթի աբսցիսն է):

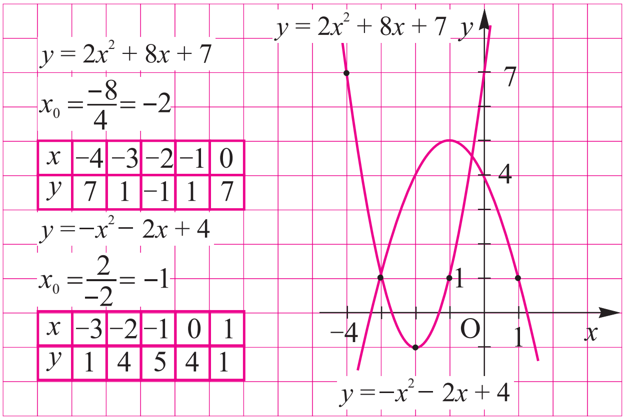
Ինչպես երևում է նկ. 99-ից, ուղիղը և պարաբոլը հատվում են երկու կետում՝ (0; –3) և (3; 0): Հենց այդ թվազույգերը համակարգի յուրաքանչյուր հավասարում դարձնում են ճիշտ հավասարություն, հետևաբար, համակարգի լուծումները (0; 3) և (3; 0) թվազույգերն են: Այլ լուծումներ համակարգը չունի:

ՕՐԻՆԱԿ 2. Գրաֆիկորեն լուծենք

$$\begin{cases} y = 2x^2 + 8x + 7, \\ y = - x^2 - 2x + 4 \end{cases} \qquad (2)$$

հավասարումների համակարգը:

Միևնույն կոորդինատային համակարգում կառուցենք $y = 2x^2 + 8x + 7$ և $y = -x^2 - 2x + 4$ (նկ. 100) պարաբոլները: Դրա համար կազմենք այդ ֆունկցիաների արժեքների աղյուսակները:



Նկ. 100

Պարաբոլները հատվում են երկու կետում, ուստի, (2) համակարգն ունի երկու լուծում: Տեղադրելով՝ հեշտ է համոզվել, որ համակարգի (–3; 1) լուծումը ճշգրիտ է, իսկ երկրորդը՝ (–0,3; 4,5)-ը՝ մոտավոր:

Դիտողություն: Եթե պահանջվի գտնել ճշգրիտ լուծումները, ապա անհրաժեշտ է լուծել

$$2x^2 + 8x + 7 = -x^2 - 2x + 4$$

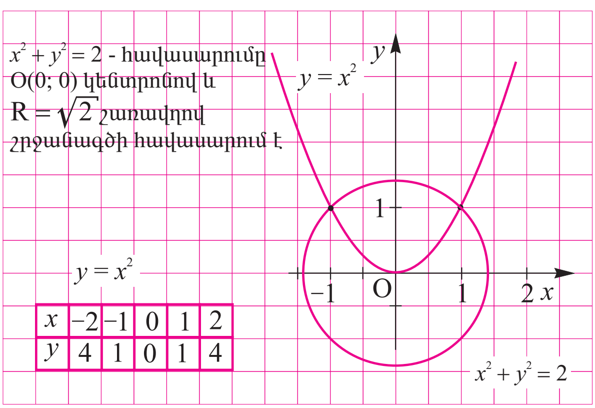
հավասարումը, որի արմատներն են՝ $x_1 = -3$, $x^2 = -\frac{1}{3}$, և գտնել դրանց համապատասխանող y-ի արժեքները՝ $y_1 = 1{,}7\ 2 = 4\frac{5}{9}$: Այժմ երկրորդ լուծումը նույնպես կարելի է ճշգրիտ գրել՝ $\left(-\frac{1}{3}; 4\frac{5}{9}\right)$:

Օրինակ 3. Գրաֆիկորեն լուծենք

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ y = x^2 \end{cases} \qquad (3)$$

համակարգը:

(3) համակարգի առաջին հավասարումը O(0; 0) կենտրոնով և $\sqrt{2}$ շառավղով շրջանագծի հավասարում է: Այն անցնում է նաև (1; 1) կետով: (3) համակարգի երկրորդ հավասարումը պարաբոլի հավասարում է: Շրջանագիծը և պարաբոլը հատվում են երկու կետում՝ (1; 1) և (–1; 1) (նկ. 101):



Նկ. 101

(3) համակարգն ունի երկու լուծում՝ (1; 1) և (–1; 1):

Դժվար չէ համոզվել տեղադրումով՝ երկու լուծումներն էլ ճիշտ են գտնված:

309°. ա) Ինչպե՞ս գրաֆիկորեն լուծել հավասարումների համակարգը:
բ) Արդյոք մի՞շտ է համակարգերի լուծման գրաֆիկական եղանակը տալիս ճշգրիտ լուծումներ:
գ) Ինչպես ստուգել ստացված լուծումը ճշգրի՞տ է, թե՞ մոտավոր:

310. Գրաֆիկական եղանակով լուծեք համակարգը.

ա) $\begin{cases} y = 3, \\ y + 6 = x^2; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x = 2, \\ x^2 = 3 + y; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ y = 2x - 3; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 2, \\ y = x + 2; \end{cases}$

ե) $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1, \\ y = -x^2 + 4x + 1; \end{cases}$ զ) $\begin{cases} y = -x^2 + 4x + 1, \\ y = x^2 + 1: \end{cases}$

311. Քանի՞ լուծում ունի հավասարումների համակարգը.

ա) $\begin{cases} y = x^2, \\ (x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 4; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9, \\ y - x = 4; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{x}, \\ y = 0{,}5x - 0{,}5; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} y = \dfrac{1}{x}, \\ y = -2x + 2; \end{cases}$

ե) $\begin{cases} y = x^2 - 6x + 10, \\ x^2 - 4x + y^2 - 2y = 20; \end{cases}$ զ) $\begin{cases} y = \dfrac{8}{x}, \\ y + 1 = x^2: \end{cases}$

5.7 Հավասարումների գրաֆիկական լուծման օրինակներ

Օրինակ 1. Գրաֆիկական եղանակով լուծենք

$$x^2 = -2x + 3 \tag{1}$$

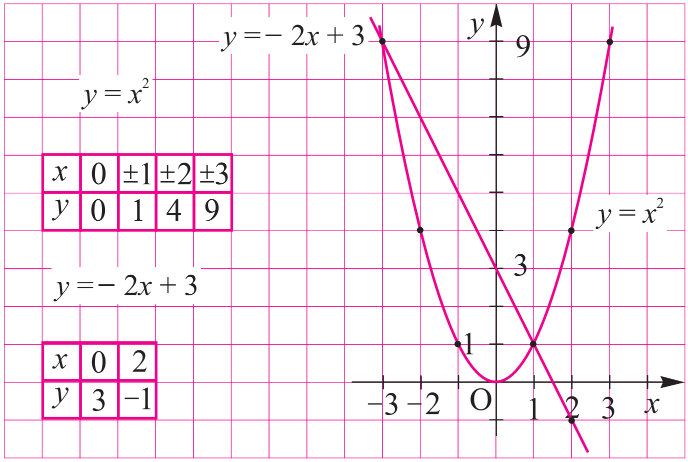
հավասարումը:

Որպեսզի գտնենք x-ի այն արժեքները, որոնց դեպքում տեղի է ունենում (1) հավասարությունը, միևնույն կոորդինատային համակարգում կառուցենք $y = 2x$ և $y = -2x + 3$ ֆունկցիաների գրաֆիկները: Դրա համար կազմենք դրանց արժեքների աղյուսակները (նկ. 102):

Նկ. 102-ում պատկերված $y = x^2$ պարաբոլը և $y = -2x + 3$ ուղիղը հատվում են (1; 1) և (–3; 9) կետերում, $x = 1$ և $x = -3$ դեպքում այդ ֆունկցիաներն ունեն նույն արժեքները, այսինքն՝ տեղի է ունենում

$$x^2 = -2x + 3$$

հավասարությունը: Դա նշանակում է, որ 1 և –3 թվերը (1) հավասարման լուծումներն են:



Նկ. 102

Հավասարումների լուծման գրաֆիկական եղանակը տալիս է միայն մոտավոր արմատներ: Ապացուցելու համար, որ գտնված արմատներից որևէ մեկը ճշգրիտ է, պետք է այդ թիվը տեղադրել լուծվող հավասարման մեջ և ստուգել՝ ստացվո՞ւմ է արդյոք ճշգրիտ հավասարություն:

Օրինակ 1-ում արմատները ճշգրիտ են գտնված, քանի որ

$$1^2 = -2 \cdot 1 + 3, \quad (-3)^2 = 2\,(-3) + 3$$

(1) հավասարումը կարելի էր լուծել առանց գրաֆիկների՝ ձևափոխելով այն

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

տեսքի:

Օրինակ 2. Գրաֆիկական եղանակով լուծենք

$$x^2 + 2x - 2 = \frac{1}{x} \qquad (2)$$

հավասարումը:

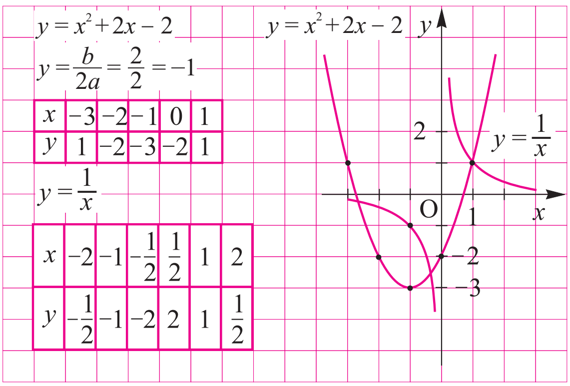
Միևնույն կոորդինատային համակարգում կառուցենք

$$y = x^2 + 2x - 2 \ \text{ և } \ y = \frac{1}{x}$$

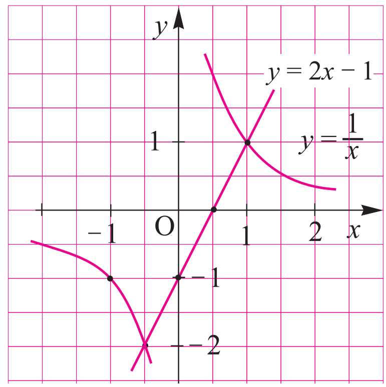
ֆունկցիաների գրաֆիկները:

Դրանք կառուցելու համար կազմենք դրանց արժեքների աղյուսակները (նկ. 103):

$y = x^2 + 2x - 2$ պարաբոլը և $y = \dfrac{1}{x}$ հիպերբոլը հատվում են (1; 1), (–0,4; –2,5) և (–2,6; –0,5) կետերում, որոնց կոորդինատների մոտավոր արժեքները գտնված են նկարից: Այդ կետերի աբսցիսները (2) հավասարման արմատներն են. $x_1 = 1$-ը ճշգրիտ արմատ է, որովհետև $1^2 + 2 \cdot 1 - 2 = \dfrac{1}{4}$, իսկ –0,4-ը և –2,6-ը՝ մոտավոր:



Նկ. 103



Նկ. 104

312. Նկ. 104-ում պատկերված են $y = \dfrac{1}{x}$ և $y = 2x - 1$ ֆունկցիաների գրաֆիկները:
ա) Նշեք x-ի մի քանի արժեքներ, որոնց դեպքում այդ ֆունկցիաները ընդունում են իրարից տարբեր արժեքներ:
բ) Նշեք $\dfrac{1}{x} = 2x - 1$ հավասարման արմատները: Գտնված արմատները ճշգրի՞տ են, թե՞ մոտավոր:

Գրաֆիկական եղանակով լուծեք հավասարումը (313-314):

313. ա) $x^2 = x + 2$; բ) $x^2 = 3x - 2$; գ) $2x^2 = 3x + 2$;
դ) $2x^2 = -x + 3$; ե) $3x^2 = -x + 4$; զ) $3x^2 = x + 2$:

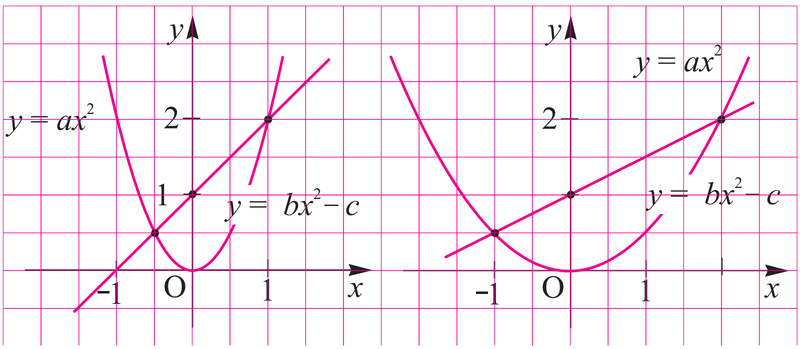
314. ա) $\dfrac{1}{x} = 2x + 1$; բ) $\dfrac{1}{x} = -x + 2$:

315. Գրաֆիկների միջոցով պարզեք՝ քանի՞ արմատ ունի հավասարումը.

ա) $x^2 = x - 1$; բ) $2x^2 = 3x + 5$;

գ) $3x^2 = x + 7$; դ) $\frac{1}{x} = -x + 2$:

316. Գրաֆիկների օգնությամբ լուծեք $ax^2 = -bx - c$ հավասարումը: Գտեք a, b և c-ն՝ օգտագործելով գրաֆիկում նշված տվյալները (նկ. 105).



ա) բ)

Նկ. 105

Պատմական ակնարկ

Առաջին և երկրորդ աստիճանի հավասարումների համակարգեր հանդիպում են դեռևս հին բաբելոնյան տեքստերում: Ահա, օրինակ, այդպիսի խնդիր.

Երկու քառակուսիների մակերեսները գումարելով՝ ստացա $\frac{255}{12}$: Երկրորդ քառակուսու կողմը հավասար է առաջին քառակուսու կողմի $\frac{2}{3}$-ին՝ ավելացրած 5: Գտեք կողմերը:

Խնդիրը բերվում է

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25\,\frac{5}{12}, \\ y = \frac{2}{3}x + 5 \end{cases}$$

համակարգի լուծմանը:

Դիտարկենք համակարգի լուծման մեկ օրինակ Դիոֆանտի «Թվաբանություն»-ից:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x^2 + y^2 = 68: \end{cases}$$

Այստեղ նույնպես Դիոֆանտը հնարամտորեն խուսափում է ընդհանուր տեսքի քառակուսային հավասարում լուծելուց: Նա առաջին հավասարումը բաժանում է 2-ի՝

$$\frac{x+y}{2}=5,$$

մտցնում նոր նշանակում՝ $d=\dfrac{x-y}{2}$, այդ դեպքում՝ $x=5+d$, $y=5-d$, և համակարգի երկրորդ հավասարումը գրում այսպես.

$$(5+d)^2+(5-d)^2=68,$$

$$50+2d^2-68,$$

$$d^2=9,$$

$$d=3,\ x=8,\ y=2:$$

Համակարգն ունի ևս մեկ լուծում. $d=-3$ դեպքում՝ (2; 8) թվազույգն է:

Դիոֆանտը մաթեմատիկոսներից առաջինն էր, որ անհայտ մեծությունների համար մտցրեց տարբեր նշանակումներ՝ հիմնականում հունական տառերով: Վերը բերված լուծումը տրված է ժամանակակից գրառմամբ:

Լուծեք հավասարումների համակարգը (317-321).

317. Դիոֆանտի «Թվաբանություն»-ից

ա) $\begin{cases} x+y=20, \\ x^2+y^2=208; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x+y=20, \\ x^2-y^2=80; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} x=3y, \\ x^2+y^2=5(x+y); \end{cases}$ դ) $\begin{cases} x=3y, \\ x^2+y^2=10(x-y); \end{cases}$

ե) $\begin{cases} x=3y, \\ x^2-y^2=12(x-y); \end{cases}$ զ) $\begin{cases} x=3y, \\ y^2=6x; \end{cases}$

է) $\begin{cases} x=3y, \\ y^2=6(x-y); \end{cases}$ ը) $\begin{cases} x-y=2, \\ x^2-y^2=x-y+20: \end{cases}$

318. Ալ-Խորեզմիի «Հանրահաշիվ»-ից (VII-VIII դ.).

ա) $\begin{cases} x+y=10, \\ xy=21; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x+y=10, \\ x^2+y^2=40; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} x+y=10, \\ x^2-y^2=x-y+54; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} x+y=10, \\ x^2=4xy; \end{cases}$

ե) $\begin{cases} x+y=10, \\ (x+y)^2=2\,\dfrac{7}{9}\,x; \end{cases}$ զ) $\begin{cases} x+y=10, \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2\,\dfrac{1}{6}; \end{cases}$

է) $\begin{cases} x + y = 10, \\ y^2 = 81x; \end{cases}$ ը) $\begin{cases} x + y = 10, \\ xy : |y - x| = 5\dfrac{1}{4}: \end{cases}$

319. Ալ-Կարաջիի «Հանրահաշիվ»-ից (XI դ.).

ա) $\begin{cases} x = \dfrac{3}{4}y, \\ xy + x + y = 62; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} xy + y = 2, \\ xy = 4x + 5: \end{cases}$

320. Լեոնարդ Պիչայեցու (Ֆիբոնաչի) «Աբակայի գրքից» (XII-XIII դ.).

ա) $\begin{cases} xy - y = 42, \\ x - y = 2; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} xy + y = 10, \\ x - y = 2; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} x + y = 10, \\ \left(\dfrac{x}{y} + 10\right)\left(\dfrac{y}{x} + 10\right) = 122\dfrac{2}{3}; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} x + y = 10, \\ \dfrac{x}{y}(x - y) = 24: \end{cases}$

321. Կ. Ռուդոլֆի «Կոսս» գրքից (XVI դ.).

ա) $\begin{cases} (x + y)(x^2 + y^2) = 539200, \\ (x - y)(x^2 - y^2) = 78400, \end{cases}$ բ) $\begin{cases} xy + x + y = 573, \\ x^2 + y^2 - x - y = 1716: \end{cases}$

ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

§ 6 Թվային հաջորդականություններ

6.1 Թվային հաջորդականության գաղափարը

Եթե յուրաքանչյուր բնական n ($n = 1,2$ ...) թվի որոշակի օրենքով համապատասխանության մեջ է դրված x_n թիվ, ապա ասում են, որ տրված է

$$x_1, x_2, ..., x_n, ... \qquad (1)$$

թվերի հաջորդականություն կամ $\{x_n\}$ ***թվային հաջորդականություն:***

$x_1, x_2, ..., x_n, ...$ թվերն անվանում են ***հաջորդականության անդամներ,*** իսկ n համարն ունեցող անդամը՝ դրա ***n-րդ անդամ.*** այն անվանում են նաև ***ընդհանուր անդամ:***

Տալ հաջորդականություն նշանակում է նշել այն օրենքը, որով ամեն մի n բնական թվի համար կարելի է հաշվել դրա n-րդ անդամը՝ x_n-ը:

Այդ օրենքը կարող է արտահայտվել տարբեր ձևերով՝ բանաձևերով, բառային նկարագրերով և այլն:

Դիտարկենք թվային հաջորդականությունը, որի n-րդ անդամը տրված է

$$x_n = n^2 \ (n = 1, 2, 3 ...) \qquad (2)$$

բանաձևով:

Օգտվելով այդ բանաձևից՝ կարելի է հաշվել (2) հաջորդականության ցանկացած անդամ, որը համապատասխանում է կոնկրետ տրված n համարին:

Օրինակ՝

$$x_4 = 4^2 = 16, \qquad x_{12} = 12^2 = 144, \qquad x_{17} = 17^2 = 289:$$

(2) հաջորդականությունը գրառում են հետևյալ կերպ.

$$1, 2^2, 3^2, ..., n^2, ...$$

կամ

$$1, 4, 9, ..., n^2, ...:$$

Այս գրառման մեջ բերված են դրա մի քանի առաջին անդամները և n-րդ անդամը:

ՕՐԻՆԱԿ 1. Դիցուք, թվային հաջորդականությունը գրված է (1) տեսքով.

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{(-1)^n}{n}, ...:$$

Այդ դեպքում ընդհանուր անդամը տրված է

$$x_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

բանաձևով:

ՕՐԻՆԱԿ 2. Դիցուք, թվային հաջորդականությունը տրված է n-րդ անդամի բանաձևով.

$$x_n = \left(\frac{1}{n}\right)^n:$$

Այդ դեպքում այն կարելի է գրել հետևյալ կերպ.

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{27}, \frac{1}{256}, ..., \left(\frac{1}{n}\right)^n, ...:$$

Երբեմն (ակնհայտ դեպքերում) թվային հաջորդականությունը տալիս են մի քանի առաջին անդամներով՝ նկատի ունենալով, որ յուրաքանչյուր հաջորդ անդամի ստացման օրինաչափությունը պահպանվում է նաև հաջորդականության մնացած բոլոր անդամների համար:

ՕՐԻՆԱԿ 3. Դիցուք, թվային հաջորդականությունը տրված է մի քանի առաջին անդամներով՝

$$2, 4, 6, 8, 10, ...: \qquad (3)$$

Այս դեպքում, ակնհայտ է, որ նրա n-րդ անդամի բանաձևն է $a_n = 2n$: Թվային հաջորդականությունը կարգավորված է յուրաքանչյուր անդամ ունի իր հաջորդ անդամը և յուրաքանչյուր անդամ, բացի առաջինից, ունի իր նախորդ անդամը:

ՕՐԻՆԱԿ 4. Դիցուք, տրված է $\{a_n\}$ հաջորդականությունը՝ 1, 3, 5, 7, ...:

Այս դեպքում, օրինակ, հաջորդականության $a_3 = 5$ անդամի հաջորդ անդամը $a_4 = 7$-ն է, իսկ նախորդը՝ $a_2 = 3$:

Դիտողություն: Թվային հաջորդականությունը կարելի է տալ նաև ***ռեկուրենտ***[1] ձևով, այսինքն՝ տալ մեկ կամ մի քանի առաջին անդամները և բանաձև, որով յուրաքանչյուր անդամ արտահայտվում է մեկ կամ մի քանի նախորդ անդամներով:

Օրինակ՝ (3) հաջորդականությունը կարելի է տալ այսպես.

$$a_1 = 2,\ a_{n+1} = a_n + 2,\ n = 1, 2, 3, ...:$$

Ֆիբոնաչիի թվերի հայտնի հաջորդականությունը տրվում է այսպես.

$$u_1 = u_2 = 1,\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n,\ n = 1, 2, 3, ...:$$

Հաշվենք դրա մի քանի առաջին անդամները.

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...:$$

322.° ա) Ո՞րն են անվանում թվային հաջորդականություն, թվային հաջորդականության անդամներ: Բերեք թվային հաջորդականությունների օրինակներ:
բ) Ի՞նչ է նշանակում տալ թվային հաջորդականությունը:
գ) Հաջորդականությունների տրման ի՞նչ եղանակներ գիտեք:

323. Տրված է $\{x_n\}$ թվային հաջորդականություն՝ 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...:
ա) Անվանեք դրա առաջին, երկրորդ, երրորդ, չորրորդ, հինգերորդ և վեցերորդ անդամները:
բ) Գրեք հաջորդականության ընդհանուր անդամի բանաձևը: Գտեք x_7, x_8, x_{20}-ը:

324. Գրեք հաջորդականության ընդհանուր անդամի բանաձևը՝
ա) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...;
բ) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ...;
գ) 4, 8, 12, 16, 20, 24, ...;
դ) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, ...;$
ե) 1, −1, 1, −1, 1, −1, ...;
զ) −1, 1, −1, 1, −1, 1, ...:

325. Տրված է հաջորդականության n-րդ անդամի բանաձևը.
ա) $a_n = 3n - 1$: Գտեք a_1; a_2; a_5; a_{100}-ը:
բ) $a_n = 3 + 2(n - 1)$: Գտեք a_1; a_2; a_{12}; a_{30} անդամները:

326. Գտեք ընդհանուր անդամի բանաձևով տրված հաջորդականության առաջին վեց անդամների գումարը.
ա) $a_n = 3n + 2$,
բ) $a_n = (-1)^n \cdot n$:

---

[1] Ռեկուրենտ՝ լատիներեն recurrens (recurrentis) բառից, որը նշանակում է անդրադարձ:

327. $\{x_n\}$ թվային հաջորդականությունը տրված է ընդհանուր անդամի բանաձևով՝ $x_n = 10 + 2n$:
ա) Գտեք x_1-ը, x_{10}-ը, x_{100}-ը:
բ) Գրեք հաջորդականության x_n անդամի հաջորդ և նախորդ անդամների բանաձևերը ($n \geqslant 2$):
գ) Գրեք հաջորդականության $n + 2$-րդ համարն ունեցող անդամի բանաձևը:

328. Հաջորդականությունը տրված է իր n-րդ անդամի բանաձևով.
ա) $a_n = 3n + 2$, բ) $b_n = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$, գ) $c_n = (-2)^n$:
Հաշվեք այդ հաջորդականության առաջին երեք և տասներորդ անդամները:

329. Հաջորդականությունը տրված է իր մի քանի առաջին անդամներով՝ 1, 5, 9, ...: Գրեք նրա ընդհանուր անդամի բանաձևը:

330. Հաջորդականությունը տրված է ռեկուրենտ ձևով.
ա) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + 3$; բ) $b_1 = -2$, $b_{n+1} = 5 \cdot b_n$;
գ) $c_1 = 4$, $c_{n+1} = c_n - 8$; դ) $x_1 = 8$, $x_{n+1} = 0{,}25 \cdot x_n$:
Գրեք առաջին հինգ անդամները:

331. Հաջորդականությունը տրված է ռեկուրենտ ձևով.
ա) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = a_n + 2$; բ) $b_1 = -5$, $b_{n+1} = 2 \cdot b_n$;
գ) $c_1 = 8$, $c_{n+1} = c_n - 4$; դ) $x_1 = 9$, $x_{n+1} = 0{,}3 \cdot x_n$:
Հաջորդականությունը տվեք n-րդ անդամի բանաձևով և հաշվեք առաջին հինգ անդամները:

332. Հաջորդականությունը տրված է մի քանի առաջին անդամներով.
ա) 5, 10, 15, 20, ... բ) 32, 16, 8, 4, ... գ) 2, –2, 2, –2, ...
Հաջորդականությունը տվեք ռեկուրենտ ձևով և հաշվեք 8-րդ անդամը:

333. Նախորդ խնդրում հաջորդականությունը տվեք n-րդ անդամի բանաձևով և հաշվեք 9-րդ անդամը:

334. Հաջորդականությունը տրված է n-րդ անդամի բանաձևով.
ա) $a_n = 5n$, բ) $b_n = 27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$, գ) $c_n = (-0{,}5)^n$:
Հաջորդականությունը տվեք ռեկուրենտ եղանակով:

335. Հաջորդականությունը տրված է n-րդ անդամի բանաձևով.
ա) $a_n = 177 - 3n$; բ) $b_n = 125 - 7n$;
գ) $x_n = 23 - 1{,}5n$; դ) $y_n = 100 - \frac{n}{3}$:
Քանի՞ դրական անդամ ունի այդ հաջորդականությունը:

336. Հաջորդականությունը տրված է n-րդ անդամի բանաձևով.
ա) $a_n = -177 + 3n$; բ) $b_n = -222 + 1{,}5n$;
գ) $x_n = -237 + 5n$; դ) $y_n = -100 + \frac{n}{7}$:
Քանի՞ բացասական անդամ ունի այդ հաջորդականությունը:

337. Գտեք Ֆիբոնաչիի թվերի հաջորդականության u_{10} և u_{15} անդամները:

338.* Ապացուցեք, որ ցանկացած n բնական թվի համար Ֆիբոնաչիի թվերի $\{u_n\}$ հաջորդականությունն օժտված է հետևյալ հատկությամբ.
ա) $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_{n+2} - 1$;
բ) $u_1 + u_3 + u_5 + \ldots + u_{2n-1} = u_{2n}$;
գ) $u_2 + u_4 + u_6 + \ldots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1$;
դ) $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \ldots + u_n^2 = u_n \cdot u_{n+1}$:

6.2* Թվային հաջորդականությունների հատկությունները

$\{x_n\}$ թվային հաջորդականությունը կոչվում է ***աճող*** (խիստ աճող), եթե ցանկացած n բնական թվի համար տեղի է ունենում

$$x_n < x_{n+1}$$

անհավասարությունը:

Աճող հաջորդականության յուրաքանչյուր հաջորդ անդամ մեծ է նախորդից:

Աճող հաջորդականության օրինակ է $a_n = 3n$ ընդհանուր անդամի բանաձևով տրված $\{a_n\}$ հաջորդականությունը:

Իրոք, քանի որ

$$a_{n+1} = 3(n + 1) = 3n + 3$$

և ցանկացած n բնական թվի համար $3n < 3n + 3$, ապա $a_n < a_{n+1}$ անհավասարությունը տեղի է ունենում ցանկացած n բնական թվի համար:

$\{x_n\}$ հաջորդականությունը, որի համար ցանկացած բնական n թվի համար տեղի է ունենում $x_n > x_{n+1}$, անհավասարությունը, անվանում են ***նվազող*** (խիստ նվազող):

Նվազող հաջորդականության յուրաքանչյուր հաջորդ անդամ փոքր է իր նախորդից։

Նվազող հաջորդականության օրինակ է

$$c_n = \frac{1}{n} \qquad (1)$$

ընդհանուր անդամի բանաձևով տրված $\{c_n\}$ հաջորդականությունը։ Իրոք, $c_n > c_{n+1}$ անհավասարությունը տեղի է ունենում ցանկացած n բնական թվի համար, որովհետև

$$c_{n+1} = \frac{1}{n+1},$$

և յուրաքանչյուր n բնական թվի համար՝

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$$

Եթե $\{x_n\}$ հաջորդականության համար յուրաքանչյուր n բնական թվի դեպքում տեղի է ունենում

$$x_n \leqslant x_{n+1}$$

անհավասարությունը, ապա ասում են, որ այդ հաջորդականությունը ***չնվազող է:***

Չնվազող հաջորդականության օրինակ է Ֆիբոնաչիի թվերից բաղկացած հաջորդականությունը։

Եթե ցանկացած n բնական թվի համար $\{x_n\}$ հաջորդականության անդամները բավարարում են

$$x_n \geqslant x_{n+1}$$

պայմանին, ապա այդ հաջորդականությունն անվանում են ***չաճող:***

Չաճող հաջորդականության օրինակ է 5, 5, 4, 4, ... հաջորդականությունը, որը կարելի է տալ հետևյալ օրենքով.

$$c_{2n-1} = c_{2n} = 6 - n,\ n = 1, 2, 3...$$

Աճող, նվազող, չաճող և չնվազող հաջորդականություններն անվանում են ***մոնոտոն*** հաջորդականություններ։

Վերը դիտարկված հաջորդականությունները մոնոտոն են, իսկ, օրինակ,

$$y_n = (-1)^n$$

ընդհանուր անդամի բանաձևով տրված $\{y_n\}$ հաջորդականությունը մոնոտոն չէ, որովհետև, օրինակ, $y_1 < y_2$, իսկ $y_2 > y_3$։

$\{x_n\}$ հաջորդականությունն անվանում են ***սահմանափակ վերևից,*** եթե գոյություն ունի այնպիսի B թիվ, որ հաջորդականության յուրաքանչյուր անդամի համար տեղի է ունենում $x_n \leqslant$ B անհավասարությունը։ Վերևից սահմանափակ է, օրինակ, (1) հաջորդականությունը, որովհետև դրա յուրաքանչյուր անդամի համար տեղի է ունենում $c_n \leqslant 1$ անհավասարությունը:

$\{x_n\}$ հաջորդականությունն անվանում են ***սահմանափակ ներքևից,*** եթե գոյություն ունի այնպիսի A թիվ, որ հաջորդականության յուրաքանչյուր անդամի համար տեղի է ունենում $x_n \geqslant A$ անհավասարությունը:

Ներքևից սահմանափակ է, օրինակ, Ֆիբոնաչիի թվերի հաջորդականությունը, որովհետև դրա յուրաքանչյուր անդամի համար տեղի է ունենում $u_n \geqslant 1$ անհավասարությունը:

$\{x_n\}$ հաջորդականությունն անվանում են ***սահմանափակ,*** եթե այն սահմանափակ է և՛ վերևից, և՛ ներքևից:

Սահմանափակ է, օրինակ, (1) հաջորդականությունը, որովհետև դրա յուրաքանչյուր անդամի համար տեղի է ունենում $0 < c_n \leqslant 1$ անհավասարությունը:

Դիտողություն: Թվային հաջորդականությունը միշտ ունի անվերջ թվով անդամներ (դրանց մի մասը կամ բոլորը կարող են լինել նույն թիվը):

Երբեմն հարմար է լինում դիտարկել նաև վերջավոր թվով անդամներ պարունակող հաջորդականություններ: Այդ դեպքում ընդունված է ասել, որ տրված է n անդամներից բաղկացած ***վերջավոր հաջորդականություն:***

Օրինակ, առաջին քսան բնական թվերից ընտրված պարզ թվերի հաջորդականությունը վերջավոր է, այն պարունակում է 8 անդամ.

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 \ (n = 8):$$

Իսկ բոլոր պարզ թվերի հաջորդականությունն անվերջ է: Այդ փաստն ապացուցվել է դեռ Էվկլիդեսի կողմից:

$a_n = 3n$ ընդհանուր անդամի բանաձևով տրված $\{a_n\}$ հաջորդականությունն անվերջ է՝ ցանկացած n բնական թվի համապատասխանում է հաջորդականության $3n$ անդամը:

Այդ նույն բանաձևով կարելի է տալ նաև վերջավոր հաջորդականություն, եթե n-ը ընդունում է առաջին մի քանի բնական արժեքներ: Օրինակ՝

$$b_n = 3n \ (n = 1, 2, 3, 4)$$

հաջորդականությունը վերջավոր է: Այն պարունակում է 4 անդամ.

$$3, 6, 9, 12:$$

Վերջավոր հաջորդականության առաջին և վերջին անդամները կոչվում են այդ ***հաջորդականության ծայրանդամներ:***

339.° Ո՞ր հաջորդականությունն են անվանում

ա) չաճող, բ) չնվազող,
գ) մոնոտոն, դ) վերևից սահմանափակ,
ե) ներքևից սահմանափակ, զ) սահմանափակ,
է) աճող, ը) նվազող:

Բերեք օրինակներ:

340. Հաջորդականությունը տրված է իր n-րդ անդամի բանաձևով

ա) $a_n = 7n - 11$; բ) $b_n = 6^n$; գ) $c_n = -3 + (1{,}2)^n$;
դ) $a_n = 2 + 3n$; ե) $b_n = 3 \cdot 2^n$; զ) $c_n = -3 \cdot (0{,}2)^n$:

Ապացուցեք, որ հաջորդականությունն աճող է և ներքևից սահմանափակ:

341. Հաջորդականությունը տրված է n-րդ անդամի բանաձևով.

ա) $a_n = -2n + 1$; բ) $b_n = (0{,}2)^n$; գ) $c_n = 3 - (1{,}1)^n$;
դ) $a_n = 3 - 2n$; ե) $b_n = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$; զ) $c_n = -16 \cdot 2^n$:

Ապացուցեք, որ հաջորդականությունը նվազող է և վերևից սահմանափակ:

342. Հաջորդականությունը տրված է n-րդ անդամի բանաձևով.

ա) $a_n = (-2)^n$; բ) $b_n = 2 \cdot (-1)^n$; գ) $c_n = n \cdot (-1)^n$;
դ) $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$; ե) $x_n = 2 + (-1)^n$; զ) $y_n = (-1)^n$:

Ցույց տվեք, որ այն մոնոտոն չի: Դրանցից որո՞նք են սահմանափակ:

343. Մտածեք օրինակներ

ա) մոնոտոն հաջորդականության,
բ) ոչ մոնոտոն հաջորդականության,
գ) ներքևից սահմանափակ հաջորդականության,
դ) սահմանափակ հաջորդականության:

344. Ճի՞շտ է արդյոք, որ ցանկացած աճող հաջորդականություն սահմանափակ է ներքևից, իսկ ցանկացած նվազող հաջորդականություն սահմանափակ է վերևից:

345. Ապացուցեք, որ π թվի տասնորդական մոտարկումներ հանդիսացող թվերի հաջորդականությունը՝ 3; 3,1; 3,14; 3,141; ..., սահմանափակ է:

346.* Հաջորդականությունը տվեք բանաձևով.

ա) 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, ...;

բ) 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, ...;

գ) 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, ...:

347.* Հաջորդականությունը տրված է n-րդ անդամի բանաձևով.

ա) $a_n = \dfrac{n-1}{n}$; բ) $b_n = \dfrac{2n+3}{2n+5}$;

գ) $x_n = \dfrac{3n+5}{4n+7}$; դ) $y_n = \dfrac{4n-3}{2n-1}$:

Ապացուցեք, որ հաջորդականությունն աճող և սահմանափակ է:

348.* Հաջորդականությունը տրված է n-րդ անդամի բանաձևով.

ա) $a_n = \dfrac{n+1}{n}$; բ) $b_n = \dfrac{2n+5}{2n+3}$;

գ) $x_n = \dfrac{3n+4}{4n+1}$; դ) $y_n = \dfrac{4n-1}{3n-2}$:

Ապացուցեք, որ հաջորդականությունը նվազող է և սահմանափակ:

349.* Հաջորդականությունը տրված է n-րդ անդամի բանաձևով.

ա) $a_n = \dfrac{3n+5}{2n-1}$; բ) $b_n = \dfrac{2n+1}{3n-5}$;

գ) $x_n = \dfrac{3n-5}{2n-1}$; դ) $y_n = \dfrac{2n+1}{3n+5}$:

Արդյոք հաջորդականությունն աճող, նվազող, սահմանափակ է:

350.* Նշեք b-ի բոլոր այն արժեքները, որոնց համար $a_n = \dfrac{1999n+b}{2000n}$ բանաձևով տրված հաջորդականությունը

ա) աճող է, բ) նվազող է:

Թվաբանական պրոգրեսիա

6.3 Թվաբանական պրոգրեսիայի գաղափարը

Թվաբանական պրոգրեսիա են անվանում այն թվային հաջորդականությունը, որի յուրաքանչյուր անդամ, սկսած երկրորդից, հավասար է իր նախորդին՝ գումարած միևնույն հաստատուն թիվը: Այդ թիվը կոչվում է ***թվաբանական պրոգրեսիայի տարբերություն:***

Այսպիսով, եթե $\{a_n\}$ թվային հաջորդականությունը թվաբանական պրոգրեսիա է, ապա գոյություն ունի այնպիսի d թիվ, որ ցանկացած n բնական թվի համար

$$a_{n+1} = a_n + d:$$

Այդ d թիվը, ինչպես նշվեց, թվաբանական պրոգրեսիայի տարբերությունն է: Օրինակ՝

$$1, 2, 3, 4, ..., n, ... \tag{1}$$
$$3, 1, -1, -3, ..., 5 - 2n, ... \tag{2}$$

հաջորդականությունները թվաբանական պրոգրեսիաներ են: (1) թվաբանական պրոգրեսիայի տարբերությունը՝ $d = 1$, իսկ (2) թվաբանական պրոգրեսիայի տարբերությունը՝ $d = -2$:

Նշենք թվաբանական պրոգրեսիայի որոշ հատկություններ.

1. ***Ցանկացած*** $\{a_n\}$ ***թվաբանական պրոգրեսիայում*** n***-րդ անդամը՝*** a_n***-ը, այդ պրոգրեսիայի*** a_1 ***առաջին անդամով և*** d ***տարբերությամբ արտահայտվում է***
$$a_n = a_1 + d(n - 1)$$
բանաձևով, որը կոչվում է թվաբանական պրոգրեսիայի n***-րդ անդամի բանաձև:***

Իրոք,

$$a_2 = a_1 + d,$$
$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d,$$
$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d:$$

Այս դատողությունների $(n - 1)$-րդ քայլում ($n \geqslant 2$) կստանանք, որ

$$a_n = a_1 + (n - 1)d:$$

2. ***Թվաբանական պրոգրեսիայի յուրաքանչյուր անդամ, սկսած երկրորդից, իր նախորդ և հաջորդ անդամների միջին թվաբանականն է, այսինքն՝***

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \text{ որտեղ } n = 2,3, ...:$$

Իրոք,

$$a_{n-1} = a_n - d, \quad a_{n+1} = a_n + d, \text{ ուստի}$$

$$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \frac{a_n - d + a_n + d}{2} = a_n:$$

Օրինակ, եթե թվաբանական պրոգրեսիայում հայտնի են $a_7 = -3$ և $a_9 = 1$, ապա կարելի է գտնել a_8-ը՝

$$a_8 = \frac{a_7 + a_9}{2} = \frac{-3 + 1}{2} = -1:$$

⌈**Դիտողություն:** 1 հատկության խիստ ապացույցը կատարվում է մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքի միջոցով (Այդ սկզբունքին կծանոթանաք հետագայում):⌋

351.° ա) Ո՞ր հաջորդականությունն են անվանում թվաբանական պրոգրեսիա:
բ) Ո՞րն են անվանում թվաբանական պրոգրեսիայի տարբերություն:

352. Գրեք թվաբանական պրոգրեսիայի n-րդ անդամի բանաձևը:

353. Ինչպիսի՞ հատկություններով է օժտված թվաբանական պրոգրեսիան:

354. Տրված է $\{a_n\}$ հաջորդականությունը՝ 2, 7, 12, 22, 27, ...:
ա) Գտեք յուրաքանչյուր հաջորդ և նախորդ անդամների տարբերությունները:
բ) Արդյոք $\{a_n\}$ հաջորդականությունը թվաբանական պրոգրեսիա է:

355. $\{a_n\}$ թվաբանական պրոգրեսիան տրված է իր ընդհանուր անդամի բանաձևով՝ $a_n = a_1 + d(n - 1)$, որտեղ $a_1 = 3$, $d = 2$: Գտեք պրոգրեսիայի առաջին հինգ անդամը:

356. Տրված է $\{a_n\}$ թվաբանական պրոգրեսիան՝ 1, 7, 13, ...:
ա) Գտեք թվաբանական պրոգրեսիայի տարբերությունը,
բ) Գտեք a_7, a_8, a_9, a_{10}-ը:

357. Հաջորդականությունը թվաբանական պրոգրեսիա՞ է.
ա) $-5, -2, 1, 1, 4, 7, 10, \ldots$; բ) $7, 0, -7, -14, -21, \ldots$;
գ) $1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{5}, 1\frac{1}{6}, \ldots$; դ) $-1, 4, 9, 14, 19, 24, \ldots$:

358. Գրեք թվաբանական պրոգրեսիայի առաջին չորս անդամը, եթե $a_1 = 2$, $d = -3$:

359. Գտեք $\{a_n\}$ թվաբանական պրոգրեսիայի հինգերորդ անդամը.
$2, \frac{41}{3}, \frac{62}{3}, \ldots$

360. $\{a_n\}$ թվաբանական պրոգրեսիայում գտեք.
ա) a_2 և d-ն, եթե $a_3 = 5$, $a_4 = 9$;
բ) a_1 և d-ն, եթե $a_2 = 7$, $a_3 = 4$;
գ) a_5 և d-ն, եթե $a_6 = 8$, $a_4 = 12$;
դ) a_7 և d-ն, եթե $a_6 = -15$, $a_8 = -11$:

361. Ապացուցեք, որ $\{a_n\}$ թվաբանական պրոգրեսիայի d տարբերությունը կարելի է հաշվել

$$d = \frac{a_m - a_k}{m - k}, \ (m \neq k)$$

բանաձևով:

$\{a_n\}$ թվաբանական պրոգրեսիայում գտեք (361-363).

362. ա) a_2 և d-ն, եթե $a_1 = 5$, $a_3 = 13$;
բ) a_1 և d-ն, եթե $a_2 = 3$, $a_{10} = 19$;
գ) a_2 և d-ն, եթե $a_{12} = -2$, $a_3 = 7$;
դ) a_{101} և d-ն, եթե $a_{12} = 20{,}5$, $a_7 = 10{,}5$:

363. ա) $a_2 + a_9$, եթե $a_1 + a_{10} = 120$;
բ) $a_1 + a_{21}$, եթե $a_2 + a_{20} = 24$;
գ) a_3, եթե $a_1 + a_5 = 48$;
դ) a_6, եթե $a_3 + a_9 = 160$:

364. ա) a_{17}, եթե $a_{15} + a_{19} = 12$; բ) a_{20}, եթե $a_{19} + a_{21} = -20$;
գ) a_5, եթե $a_3 + a_7 = 6$; դ) a_8, եթե $a_2 + a_{14} = 28$:

365. 12 թիվն արդյոք թվաբանական պրոգրեսիայի անդամ է.
ա) $-10, -8, -6, \ldots$; բ) $-11, -8, -5, \ldots$;
գ) $-3, 0, 3, \ldots$; դ) $44{,}5, 43, 41{,}5, \ldots$:
Եթե «այո», ապա նշեք համարը:

366. 34 թիվը $-47, -44, -41, \ldots$ թվաբանական պրոգրեսիայի անդա՞մ է:
Եթե «այո», ապա նշեք համարը:

367. Քանի՞ դրական անդամ ունի թվաբանական պրոգրեսիան.
ա) $3{,}8, 3{,}5, 3{,}2, \ldots$; բ) $7{,}1, 6{,}9, 6{,}7, \ldots$;
գ) $14\frac{1}{3}, 13\frac{2}{3}, 13, \ldots$; դ) $15\frac{3}{4}, 14\frac{1}{4}, 12\frac{3}{4}, \ldots$:

368. Քանի՞ բացասական անդամ ունի թվաբանական պրոգրեսիան.
ա) $-3{,}9, -3{,}7, -3{,}5, \ldots$; բ) $-8{,}2, -7{,}9, -7{,}6, \ldots$;
գ) $-18\frac{2}{3}, -15\frac{1}{3}, \ldots$; դ) $-16\frac{1}{4}, -15\frac{1}{2}, \ldots$:

369. Ապացուցեք, որ ընդհանուր անդամի բանաձևով տրված հաջորդականությունը թվաբանական պրոգրեսիա է.
ա) $a_n = 3n - 7$; բ) $a_n = -3n + 5$;
գ) $a_n = 2n + 8$; դ) $a_n = -2n - 3$:

370.* Ճի՞շտ է արդյոք, որ թվաբանական պրոգրեսիան.
ա) աճող է և ներքևից սահմանափակ, եթե $d > 0$,
բ) նվազող է և վերևից սահմանափակ, եթե $d < 0$:

6.4 Թվաբանական պրոգրեսիայի առաջին *n* անդամների գումարը

$\{a_n\}$ թվաբանական պրոգրեսիայի առաջին n անդամների գումարին հավասար թիվը նշանակում են S_n-ով, այսինքն՝

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n \qquad (n \geqslant 1):$$

Մասնավորապես՝ $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$ և այլն:

Թվաբանական պրոգրեսիայի առաջին n անդամների գումարը հավասար է առաջին և n-րդ անդամների կիսագումարի և անդամների թվի արտադրյալին, այսինքն՝ ճիշտ է

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \qquad (1)$$

բանաձևը:

Իրոք,

$$2S_n = S_n + S_n = (a_1 + a_2 + ... + a_n) + (a_1 + a_2 + ... + a_n) =$$
$$= (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + ... + (a_n + a_1):$$

Քանի որ $a_2 + a_{n-1} = a_1 + d + a_n - d = a_1 + a_n,$

$a_3 + a_{n-2} = a_1 + 2d + a_n - 2d = a_1 + a_n,$

և այլն, ապա ստանում ենք

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n:$$

Այստեղից էլ հետևում է (1) բանաձևը:

Եթե (1) բանաձևում a_n-ը փոխարինենք $a_1 + (n - 1)d$-ով, ապա կստանանք թվաբանական պրոգրեսիայի առաջին n անդամների գումարը հաշվելու բանաձևի այլ գրառում՝

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n: \qquad (2)$$

ՕՐԻՆԱԿ 1. $\{a_n\}$ թվաբանական պրոգրեսիայում տրված են առաջին անդամը՝ $a_1 = 11$, և տասնհինգերորդ անդամը՝ $a_{15} = 27$: Հաշվենք թվաբանական պրոգրեսիայի առաջին տասնհինգ անդամների գումարը:

Ըստ (1) բանաձևի՝

$$S_{15} = \frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15 = \frac{11 + 27}{2} \cdot 15 = 285:$$

ՕՐԻՆԱԿ 2. $\{a_n\}$ թվաբանական պրոգրեսիայում տրված են առաջին անդամը՝ $a_1 = 9$, և տարբերությունը՝ $d = 2$: Հաշվենք թվաբանական պրոգրեսիայի առաջին տասն անդամների գումարը:

Ըստ (2) բանաձևի՝

$$S_{10} = \frac{2a_1 + (10-1)d}{2} \cdot 10 = (2 \cdot 9 + 9 \cdot 2) \cdot 5 = 180:$$

Դիտողություն: (1) բանաձևի լրիվ ապացույցը կատարվում է մաթեմատիկական ինդուկցիոն սկզբունքի կիրառումով:

371. Գրեք թվաբանական պրոգրեսիայի առաջին n անդամների գումարի հաշվման բանաձևը՝ արտահայտված
ա) առաջին և n-րդ անդամներով,
բ) առաջին անդամով և պրոգրեսիայի տարբերությամբ:

372. Հաշվեք գումարը.
ա) $1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99 + 100$;
բ) $30 + 31 + 32 + ... + 38 + 39 + 40$;
գ) $11 + 12 + 13 + ... + 87 + 88 + 89$:

Տրված է $\{a_n\}$ թվաբանական պրոգրեսիան: Հաշվեք (373-375).

373. ա) S_{20}, եթե $a_1 = 1$, $a_{20} = 20$; բ) S_{30}, եթե $a_1 = -10$, $a_{30} = 20$;
գ) S_{13}, եթե $a_1 = 17$, $a_{13} = 13$; դ) S_{17}, եթե $a_1 = 11$, $a_{17} = 19$:

374. ա) S_{20}, եթե $a_1 = 1$, $d = 1$; բ) S_{40}, եթե $a_1 = 2$, $d = 2$;
գ) S_{11}, եթե $a_1 = -2$, $d = 4$; դ) S_{15}, եթե $a_1 = -3$, $d = 3$:

375.* ա) S_{10}, եթե $a_2 = 1$, $d = -2$; բ) S_5, եթե $a_8 = 4$, $d = -1$;
գ) S_{17}, եթե $a_9 = 2$; դ) S_{19}, եթե $a_{10} = 4$:

376. ա) Գտեք առաջին 40 զույգ թվերի գումարը:
բ) Գտեք բոլոր եռանիշ թվերի գումարը:
գ) Գտեք 1-ից մինչև 100 այն բնական թվերի գումարը, որոնք 3-ի բազմապատիկներն են:

377. Գումարելով $\{a_n\}$ թվաբանական պրոգրեսիայի առաջին մի քանի անդամներ՝ ստացել են 430: Քանի՞ անդամ են գումարել, եթե $a_1 = -7$, $d = 3$:

378. Քանի՞ զարկ կկատարի պատի ժամացույցը մեկ օրում, եթե զարկերը կատարվում են միայն ժամը մեկ, իսկ դրանց քանակը հավասար է ժամ արտահայտող թվին:

379. ա) $\{a_n\}$ թվաբանական պրոգրեսիայում $a_5 = 11$, $s_8 = 17$: Գտեք այդ պրոգրեսիայի առաջին տասն անդամների գումարը:
բ) Մտածեք խնդիր թվաբանական պրոգրեսիայի առաջին n անդամների գումարը գտնելու վերաբերյալ:

380.* ա) Արտահայտեք $\{a_n\}$ թվաբանական պրոգրեսիայի առաջին $(2n - 1)$ անդամների գումարը n-ով և a_n-ով:
բ) $\{a_n\}$ թվաբանական պրոգրեսիայի համար հաշվեք S_{2001}-ը, եթե $a_{1001} = 2000$:

381. ***Պյութագորասի խնդիրը*** (մ.թ.ա. 580-500 թթ.): Գտեք առաջին n կենտ բնական թվերի գումարը.

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1)$$

382. ***Խնդիր Ահմեսի մագաղաթից*** (մ.թ.ա. XVIII-XVIIդ.): Հացի 10 չափը բաժանեք 10 մարդու միջև այնպես, որ յուրաքանչյուր մարդու և իր նախորդի մոտ եղած հացերի քանակների տարբերությունը կազմի $\frac{1}{8}$ չափ:

Երկրաչափական պրոգրեսիա

6.5 Երկրաչափական պրոգրեսիայի գաղափարը

Երկրաչափական պրոգրեսիա են անվանում այն թվերի հաջորդականությունը, որի յուրաքանչյուր անդամ, սկսած երկրորդից, հավասար է իր նախորդը բազմապատկած միևնույն զրոյից տարբեր թվով: Այդ թիվն անվանում են ***երկրաչափական պրոգրեսիայի հայտարար***(1)*:*

Այսպիսով, եթե $\{a_n\}$ հաջորդականությունը q հայտարարով երկրաչափական պրոգրեսիա է, ապա $q \neq 0$ և ցանկացած n բնական թվի համար $a_{n+1} = a_n \cdot q$: Օրինակ՝

$$2, 4, 8, 16, 32, ..., 2^n, ... \qquad (1)$$

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, ... (-1)^{n-1}, ... \qquad (2)$$

$$\frac{1}{7}, -\frac{1}{21}, \frac{1}{63}, -\frac{1}{189}, ..., \frac{1}{7} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}, ... \qquad (3)$$

հաջորդականությունները երկրաչափական պրոգրեսիաներ են: (1) երկրաչափական պրոգրեսիայի հայտարարը՝ $q = 2$, (2) պրոգրեսիայի հայտարարը՝ $q = -1$, (3) պրոգրեսիայի հայտարարը՝ $q = -\frac{1}{3}$:

Նշենք երկրաչափական պրոգրեսիայի որոշ ***հատկություններ:***

1. ***Ցանկացած*** $\{a_n\}$ ***երկրաչափական պրոգրեսիայի*** n***-րդ անդամը՝*** a_n***-ը արտահայտվում է դրա*** a_1 ***առաջին անդամով,*** q ***հայտարարով և***

(1) Սովորաբար դիտարկում են այնպիսի երկրաչափական պրոգրեսիաներ, որոնց առաջին անդամը զրոյից տարբեր է:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

բանաձևով, որը կոչվում է երկրաչափական պրոգրեսիայի n-րդ անդամի բանաձև:

Իրոք, $a_2 = a_1 \cdot q,$

$a_3 = a_2 \cdot q = (a_1q) \cdot q = a_1q^2,$

$a_4 = a_3 \cdot q = (a_1q^2) \cdot q = a_1q^3$:

Այս դատողությունների $(n - 1)$-րդ քայլում $(n \geqslant 2)$ կստանանք, որ

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}:$$

2. ***Դրական անդամներով երկրաչափական պրոգրեսիայի ցանկացած անդամ, բացի առաջինից, իր նախորդ և հաջորդ անդամների երկրաչափական միջինն է, այսինքն՝***

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} \quad (n \geqslant 2):$$

Իրոք,

$$\sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} = \sqrt{\frac{a_n}{q} \cdot a_n \cdot q} = \sqrt{a_n^2} = a_n,$$

քանի որ $a_n > 0$:

Օրինակ, եթե հայտնի են դրական անդամներով երկրաչափական պրոգրեսիայի երկու անդամներ՝ $a_7 = 32$ և $a_9 = 2$, ապա կարելի է գտնել a_8-ը.

$$a_8 = \sqrt{a_7 \cdot a_9} = \sqrt{32 \cdot 2} = 8:$$

⌈**Դիտողություն:** 1 հատկության լրիվ ապացույցը պահանջում է մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքի կիրառություն:⌋

383. ա) Ո՞ր հաջորդականությունն են անվանում երկրաչափական պրոգրեսիա: Ո՞րն է երկրաչափական պրոգրեիայի հայտարարը:
բ) Գրեք երկրաչափական պրոգրեսիայի n-րդ անդամի բանաձևը: Ի՞նչ հատկություններով է օժտված երկրաչափական պրոգրեսիան:

384.* Ճի՞շտ է արդյոք, որ դրական անդամներով երկրաչափական պրոգրեսիան
ա) աճող է և ներքևից սահմանափակ, եթե $q > 1$,
բ) նվազող է և վերևից սահմանափակ, եթե $0 < q < 1$:

385.* Պարզեք՝ աճո՞ղ է, թե՞ նվազող $\{a_n\}$ երկրաչափական պրոգրեսիան, եթե

ա) $a_1 < 0$, $q > 1$,   բ) $a_1 < 0$, $0 < q < 1$:

Արդյոք այն սահմանափակ է:

386. ա) Տրված է 2, 4, 8, 16, ... հաջորդականությունը: Գտեք յուրաքանչյուր հաջորդ և նախորդ անդամների քանորդը:

բ) Այդ հաջորդականությունը երկրաչափական պրոգրեսիա՞ է:

387. ա) Տրված է 1, 3, 9, 27, ... երկրաչափական պրոգրեսիան: Գտեք նրա հայտարարը և հինգերորդ, վեցերորդ և յոթերորդ անդամները:

բ) Երկրաչափական պրոգրեսիան տրված է n-րդ անդամի բանաձևով՝ $a_n = 3 \cdot 5^{n-1}$: Գտեք այդ պրոգրեսիայի առաջին հինգ անդամները:

388. Հաջորդականություններն արդյոք երկրաչափական պրոգրեսիա է.

ա) 1, 8, 15, 21, 26, ...;   բ) 4, 2, 1, 0,5, 0,25, ...;

գ) –2, 2, –2, 2, –2, ...;   դ) 0, 4, 16, 64, 256, ...:

389. Գտեք $\{a_n\}$ երկրաչափական պրոգրեսիայի առաջին չորս անդամները, եթե

$$a_1 = 2,\ q = 0{,}25:$$

390. Գտեք 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, ... երկրաչափական պրոգրեսիայի հինգերորդ անդամը:

391. Տրված է $\{a_n\}$ երկրաչափական պրոգրեսիան: Հաշվեք.

ա) a_3, եթե $a_1 = 0{,}5$, $q = -2$;   բ) a_4, եթե $a_1 = -2$, $q = 3$;

գ) a_3 և q, եթե $a_1 = 3$, $a_2 = 4$;   դ) a_3 և q, եթե $a_1 = -4$, $a_2 = 6$;

ե) a_1 և q, եթե $a_2 = -1$, $a_3 = 2$;   զ) a_1 և q, եթե $a_2 = -3$, $a_3 = -2$;

է) q, եթե $a_5 = 4$, $a_8 = 108$;   ը) q, եթե $a_4 = 5$, $a_7 = 320$:

392. Տրված են երկրաչափական պրոգրեսիայի երեք իրար հաջորդող անդամներ.

ա) 7, x, 63: Գտեք x-ը, եթե $x > 0$:

բ) 2, x, 18: Գտեք x-ը, եթե $x < 0$:

գ) 3,2, x, 0,2: Գտեք x-ը:

393. Գտեք $\{a_n\}$ երկրաչափական պրոգրեսիայի a_1-ը և q-ն, եթե
ա) $a_4 - a_2 = 18$ և $a_5 - a_3 = 36$; բ) $a_1 + a_4 = 30$, $a_2 + a_3 = 10$:

394. Ապացուցեք, որ ցանկացած $\{b_n\}$ երկրաչափական պրոգրեսիայի համար ճիշտ է հավասարությունը.
ա) $\dfrac{b_9 + b_{10}}{b_7 + b_8} = \dfrac{b_{11} + b_{12}}{b_9 + b_{10}}$; բ) $\dfrac{b_5 + b_6 + b_7}{b_8 + b_9 + b_{10}} = \dfrac{b_{11} + b_{12} + b_{13}}{b_{14} + b_{15} + b_{16}}$:

395.* ***Ի. Նյուտոնի խնդիրները*** (1643 - 1727).
ա) Տրված են երկրաչափական պրոգրեսիայի չորս՝ իրար հաջորդող անդամներ: Երկու ծայրանդամների գումարը 13 է, իսկ երկու միջին անդամների գումարը՝ 4: Գտեք այդ թվերը:
բ) Տրված են երկրաչափական պրոգրեսիայի երեք հաջորդական անդամներ, որոնց գումարը 19 է, իսկ քառակուսիների գումարը՝ 133: Գտեք այդ թվերը:

6.6 Երկրաչափական պրոգրեսիայի առաջին *n* անդամների գումարը

$\{a_n\}$ երկրաչափական պրոգրեսիայի առաջին n անդամների գումար հանդիսացող թիվը նշանակում են S_n-ով, այսինքն՝

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n:$$

q հայտարարով $\{a_n\}$ երկրաչափական պրոգրեսիայի առաջին n անդամների գումարը.

$$S_n = n \cdot a_1, \ \textbf{\textit{եթե}} \ q = 1, \qquad (1)$$

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}, \ \textbf{\textit{եթե}} \ q \neq 1: \qquad (2)$$

Իրոք, $q = 1$ դեպքում (1) բանաձևն ակնհայտ է:

Դիցուք, այժմ $q \neq 1$: Այդ դեպքում՝

$$S_n(1 - q) = S_n - S_nq = a_1 + a_1q + \ldots + a_1q^{k-1} -$$
$$-(a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^{n-1} + a_1q^n) = a_1 - a_1q^n = a_1(1 - q^n):$$

Հետևաբար՝ $S_n(1 - q) = a_1(1 - q^n)$,
և քանի որ $q \neq 1$, ապա

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}:$$

(2) բանաձևն ապացուցված է:

Նկատենք, որ (2) բանաձևը հարմար է օգտագործել $q < 1$ դեպքում: Իսկ եթե $q > 1$, ապա հարմար է օգտվել այդ բանաձևի այլ գրառումից.

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \qquad (3)$$

ՕՐԻՆԱԿ 1. $\{a_n\}$ երկրաչափական պրոգրեսիայում $a_1 = 8$, $q = \frac{1}{2}$: Հաշվենք առաջին հինգ անդամների գումարը:

Ըստ (2) բանաձևի՝

$$S_5 = \frac{a_1 \cdot (1 - q^5)}{1 - q} = \frac{8\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5\right)}{1 - 1\frac{1}{2}} = \frac{8 \cdot \frac{31}{32}}{\frac{1}{2}} = \frac{31}{2} = 15{,}5:$$

ՕՐԻՆԱԿ 2. Երկրաչափական պրոգրեսիայում $a_1 = 8$, $q = 2$: Հաշվեք առաջին հինգ անդամների գումարը:

Ըստ (3) բանաձևի՝

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} = \frac{8\,(2^5 - 1)}{2 - 1} = 248:$$

Դիտողություն: (2) բանաձևի լրիվ ապացույցը պահանջում է մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքի կիրառում:

396. Ի՞նչ բանաձևով են հաշվում երկրաչափական պրոգրեսիայի առաջին n անդամների գումարը:

397. Գտեք երկրաչափական պրոգրեսիայի առաջին հինգ անդամների գումարը, եթե

ա) $a_1 = 5$, $q = 2$;
բ) $a_1 = 4$, $q = -3$;
գ) $a_1 = -2$, $q = \frac{1}{2}$;
դ) $a_1 = -\frac{1}{3}$, $q = -2$;
ե) $a_2 = 4$, $a_3 = 7$;
զ) $a_3 = 2$, $a_1 = 1$:

398. $\{a_n\}$ երկրաչափական պրոգրեսիայի համար գտեք S_6-ը, եթե $a_1 = 48$, $q = \frac{1}{2}$:

399. $\{a_n\}$ երկրաչափական պրոգրեսիայում $a_1 = 14$ $q = -1$: Հաշվեք
ա) S_{100}-ը, բ) S_{101}-ը:

400. Հաշվեք երկրաչափական պրոգրեսիայի առաջին տասն անդամների գումարը.
ա) $-32, 16, -8, 4, \ldots$ բ) $32, 16, 8, 4, \ldots$

401. $\{a_n\}$ երկրաչափական պրոգրեսիայում հաշվեք
ա) S_{10}, եթե $a_1 = -\frac{1}{36}$, $q = 2$; բ) S_{10}, եթե $a_1 = -\frac{1}{36}$, $q = -2$;
գ) S_6, եթե $a_1 = -\frac{1}{27}$, $q = 3$; դ) S_6, եթե $a_1 = -\frac{2}{27}$, $q = -3$:

402.* Հաշվեք երկրաչափական պրոգրեսիայի առաջին վեց անդամների գումարը, եթե
ա) պրոգրեսիայի երկրորդ և առաջին անդամների տարբերությունը 4 է, իսկ չորրորդ և երրորդ անդամների տարբերությունը՝ 16:
բ) պրոգրեսիայի երկրորդ և առաջին անդամների տարբերությունը 3 է, իսկ առաջին երեք անդամների գումարը՝ 21:
գ) պրոգրեսիայի առաջին երեք անդամների գումարը 111 է, իսկ հայտարարի խորանարդը՝ 4:

403.* Երկրաչափական պրոգրեսիայի առաջին տասն անդամների գումարը 64 է, իսկ առաջին և տասներորդ անդամների արտադրյալը՝ 16: Գտեք այդ պրոգրեսիայի առաջին տասն անդամների հակադարձ թվերի գումարը:

6.7 Անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիա

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

երկրաչափական պրոգրեսիան անվանում են ***անվերջ նվազող,*** եթե հայտարարի բացարձակ արժեքը փոքր է 1-ից՝ $|q| < 1$: Օրինակ՝

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$$

երկրաչափական պրոգրեսիան անվերջ նվազող է, քանի որ հայտարարի բացարձակ արժեքը փոքր է 1-ից.

$$|q| = \frac{1}{2} < 1:$$

Նշենք, որ ցանկացած երկրաչափական պրոգրեսիայի առաջին n անդամների գումարի բանաձևը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով.

$$S_n = \frac{1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} \cdot q^n \qquad (q \neq 1): \qquad (1)$$

Անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիայի դեպքում (1) հավասարության աջ մասի երկրորդ գումարելին n-ի անսահմանափակ մեծացման դեպքում ձգտում է զրոյի, և հետևաբար, (1) հավասարության ձախ մասը, այսինքն՝ S_n-ը ձգտում է

$$S = \frac{a_1}{1-q} \qquad (2)$$

թվին[1]: Հենց այդ թիվն էլ անվանում են $q(|q| < 1)$ հայտարարով $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ ***անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիայի գումար*** և գրում այսպես.

$$\frac{a_1}{1-q} = a_1 + a_2 + ... a_n + ...,$$

որտեղ $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ $(|q| < 1)$ $n = 1, 2, 3, ...$

ՕՐԻՆԱԿ 1. Հաշվենք

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ...$$

անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիայի գումարը:

Այստեղ $a_1 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$: Ըստ (2) բանաձևի՝

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1:$$

Եթե դիտարկենք 1 մակերեսով քառակուսի և սկզբից

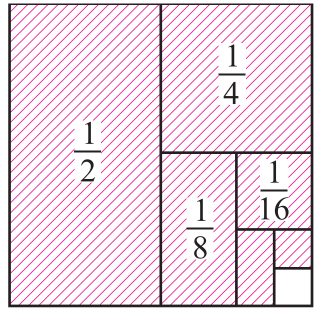
ներկենք $\frac{1}{2}$, հետո՝ $\frac{1}{4}$, ապա՝ $\frac{1}{8}$,

այնուհետև՝ $\frac{1}{16}$ մասերը և այլն (նկ. 1), ապա պարզ կդառնա,

---

[1] Այս դատողությունների խիստ հիմնավորումը տրվում է սահմանների տեսության մեջ:

որ այդ ներկման պրոցեսն անվերջ է և ներկված մասերի մակերեսների գումարն անսահմանափակորեն մոտենում է տրված քառակուսու մակերեսին (ձգտում է 1-ի):



Նկ. 1

ՕՐԻՆԱԿ 2. Հաշվենք

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\ldots$$

անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիայի գումարը:

Այստեղ $a_1=1$, $q=-\frac{1}{2}$: Ըստ (2) բանաձևի՝

$$S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}:$$

Երբեմն պարբերական կոտորակները սովորական կոտորակ դարձնելու համար օգտվում են անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիայի գումարի բանաձևից: Օրինակներով ցույց տանք, թե ինչպես է դա արվում:

ՕՐԻՆԱԿ 3. 0,(7) անվերջ պարբերական կոտորակը դարձնենք սովորական կոտորակ:

Սկզբից տրված կոտորակը գրենք հետևյալ տեսքով՝

$$0,(7)=0,777\ \ldots=0,7+0,77+0,777+\ \ldots \qquad (3)$$

Այս հավասարության աջ մասը՝ $a_1=0,7$ առաջին անդամով և $q=0,1$ հայտարարով $\{a_n\}$, անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիայի գումար է, ուստի, ըստ (2)բանաձևի՝

$$0,7=\frac{0,7}{1-0,1}=\frac{0,7}{0,9}=\frac{7}{9}:$$

ՕՐԻՆԱԿ 4. 0,1 (45) անվերջ պարբերական կոտորակը դարձնենք սովորական կոտորակ:

Նախ՝ տրված կոտորակը գրենք հետևյալ տեսքով.

$$0,1(45)=0,14545\ldots=0,1+0,045+0,00045+\ldots:$$

Այս հավասարության աջ մասում 0,1 թվից հետո գրված է $a_1=0,045$ առաջին անդամով և $q=0,01$ հայտարարով անվերջ նվազող $\{a_n\}$ երկրաչափական պրոգրեսիայի գումարը:

Ուստի, ըստ (2) բանաձևի՝

$$0,1(45)=0,1\ +\frac{0,045}{1-0,01}=\frac{1}{10}+\frac{0,045}{0,99}=\frac{1}{10}+\frac{45}{990}=\frac{8}{55}:$$

Դիտողություն: Բացատրենք, թե ինչու են ճիշտ (3) հավասարությունը և նմանատիպ հավասարությունները այլ պարբերական տասնորդական կոտորակների համար:

Դիցուք, տրված է

$$0{,}7,\ 0{,}07,\ 0{,}007,\ \ldots,\ 0{,}7\cdot(0{,}1)^{n-1}\ \ldots$$

անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիան: Այդ դեպքում, ըստ (2) բանաձևի՝

$$S=\frac{0{,}7}{1-0{,}1}=\frac{0{,}7}{0{,}9}=\frac{7}{9}: \qquad (4)$$

Մենք գիտենք, որ $\frac{7}{9}$ կոտորակը կարելի է գրել անվերջ պարբերական տասնորդական կոտորակի տեսքով՝ 0,(7) = 0,777 ... (անկյունաձև բաժանման եղանակով):

Դրա համար էլ համարում են, որ

$$0{,}(7)=0{,}7+0{,}07+0{,}007+\ldots:$$

Այդ դեպքում (4) բանաձևը 0,(7) անվերջ պարբերական տասնորդական կոտորակը $\frac{7}{9}$ սովորական կոտորակ դարձնելու բանաձևն է:

404.° Ո՞ր երկրաչափական պրոգրեսիան են անվանում անվերջ նվազող:

405.* Մտածեք անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիայի օրինակ, որը նվազող հաջորդականություն չէ:

406. Հաշվեք անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիայի գումարը, եթե

ա) $a_1=4,\ q=\frac{1}{2}$; բ) $a_1=4,\ q=-\frac{1}{2}$;

գ) $a_1=5,\ q=\frac{1}{10}$; դ) $a_1=5,\ q=-\frac{1}{10}$:

407. Անվերջ պարբերական տասնորդական կոտորակը դարձրեք սովորական կոտորակ.

ա) 0,(3); բ) 0,(8); գ) 0,(5);
դ) 0,(13); ե) 0,(27); զ) 0,(45);
է) 0,(123); ը) 0,(456); թ) 0,(1999);
ժ) 0,5(7); ի) 0,23(8); լ) 0,2(38):

408.* ***Պ. Ֆերմայի խնդիրը*** (1601-1665): Ապացուցեք, որ $\{a_n\}$ անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիայի համար տեղի է ունենում

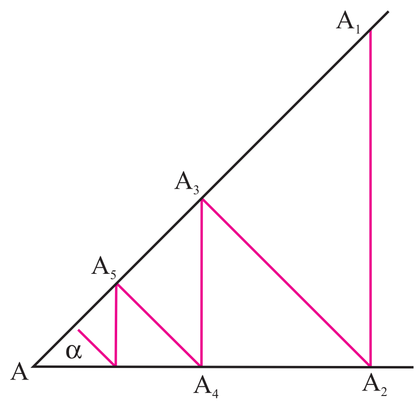
$$\frac{S}{S-a_1}=\frac{a_1}{a_2}$$

հավասարությունը:

409.* Գտեք անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիայի գումարը.

ա) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$; 1; $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$; ...; բ) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$; 1; $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$; ...:

410.* Տրված է α մեծությամբ սուր անկյուն: Նրա կողմերից մեկի վրա գագաթից l հեռավորության վրա նշված է A_1 կետը: Այդ կետից անկյան մյուս կողմին տարված է A_1A_2 ուղղահայաց, այնուհետև A_2 կետից տարված է առաջին կողմին ուղղահայաց և այլն (նկ. 2): Ստացվեց անվերջ թվով օղակներով (կողմերով) բեկյալ: Հաշվենք դրա երկարությունը, եթե
ա) l = 1մ, $\alpha = 45°$,
բ) l = 1մ, $\alpha = 30°$:



Նկ. 2

Պատմական տեղեկություններ

«Պրոգրեսիա» բառը լատիներեն է (progressio), որը նշանակում է «շարժում առաջ», «առաջընթաց» (ինչպես «պրոգրես» բառն է):

Մեր թվարկության սկզբում հայտնի է հետևյալ լեգենդ-խնդիրը. «Հնդկաստանի թագավոր Շերամն իր մոտ կանչեց շախմատի խաղը հայտնագործած իր հպատակ Սետուին, որպեսզի պարգևատրի սրամիտ գյուտի համար: Սետուն թագավորին ծաղրելու համար պահանջեց իրեն ցորեն տալ՝ շախմատային տախտակի առաջին վանդակի վրա դնելով 1 հատիկ, երկրորդի վրա՝ 2 հատիկ, երրորդի վրա՝ 4 և այլն: Պարզվեց, որ թագավորն ի զորու չէր կատարելու Սետույի այդ «համեստ» ցանկությունը:

Խնդրում անհրաժեշտ է գտնել

$$1, 2, 2^2, ..., 2^{64}$$

երկրաչափական պրոգրեսիայի անդամների գումարը, որի առաջին անդամը 1 է և հայտարարը՝ 2: Այդ գումարը հավասար է

$$2^{64} - 1 = 18446744073709551615:$$

Այդ քանակությամբ հացահատիկներ կարելի է հավաքել մի մոլորակից, որի մակերևույթը մոտ 2000 անգամ մեծ է երկրագնդի մակերևույթից:

Երկրաչափական և թվաբանական պրոգրեսիաների հետ առնչվող խնդիրներ հանդիպում են բաբելացիների մոտ, եգիպտական մագաղաթներում, հին չինական «Մաթեմատիկան 9 գրքով» աշխատությունում: Այսպես՝ բաբելացիների սեպագիր աղյուսակներից մեկում պահանջվում է գտնել

$$1, 2, 2^2, ..., 2^{n-1}, ...$$

երկրաչափական պրոգրեսիայի առաջին իննը անդամների գումարը: Ահա այլ խնդիր, որը լուծում էին Հին Բաբելոնում մ.թ.ա. երկրորդ հազարամյակում. «10 եղբայրներ են և արծաթի $1\frac{2}{3}$ մինա: Եղբայրը եղբորից բարձրանում է, ինչքա՞ն է բարձրանում, չգիտեմ: Ութերորդ եղբոր բաժինը 6 շեկել է: Եղբայրը եղբորից ինչքանո՞վ է բարձր»: Այստեղ պահանջվում է թվաբանական պրոգրեսիայի առաջին տասն անդամների գումարով՝ $1\frac{2}{3}$ մինա (1 մինա = 60 շեկել), և հայտնի ութերորդ անդամով գտնել թվաբանական պրոգրեսիայի տարբերությունը: Ահմեսի մագաղաթում առաջարկվում է այսպիսի խնդիր. «Յոթ մարդ ունի յոթական կատու, յուրաքանչյուր կատու ուտում է յոթ մուկ, յուրաքանչյուր մուկ ուտում է յոթ հասկ, մեկ հասկից կարող է աճել յոթ չափ գարի: Որքա՞ն են այս շարքի թվերը և դրանց գումարը»:

Նշենք նաև, որ Արքիմեդը գիտեր՝ ինչ է երկրաչափական պրոգրեսիան և կարողանում էր հաշվել ցանկացած թվով անդամների գումարը: Թվաբանական պրոգրեսիայի անդամների գումարը գտնելու կանոնն առաջին անգամ հանդիպում է Լեոնարդո Պիզայեցու «Աբակի գիրքը» աշխատությունում (1202թ.): Անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիայի անդամների գումարի բանաձևը հայտնի էր Պ. Ֆերմային (XVII դար):

Պրոգրեսիաների վերաբերյալ հետաքրքիր խնդիրներ կան Մագնիցկիի «Թվաբանություն»-ում: Ահա այդ խնդիրներից մեկը.

«Մի մարդ վաճառում էր իր ձին 1000 ռ-ով: Առևտրականն ասաց, որ դա շատ բարձր գին է: «Լավ,- ասաց վաճառողը,- եթե դու ասում ես, որ ձին թանկ է, ապա այն ձրի վերցրու, բայց վճարիր միայն նրա սմբակների մեխերի համար: Իսկ յուրաքանչյուր սմբակում 6-ական մեխ կա: Եվ դու ինձ վճարիր այսպես՝ առաջին մեխի համար կեսնոց (0,25 կոպեկ), երկրորդի համար՝ երկու, երրորդի՝ չորս և այդպես շարունակ, յուրաքանչյուր մեխի համար երկու անգամ ավելի, քան նախորդ մեխի համար: Առևտրականը, մտածելով, որ կվճարի 1000 ռուբլուց բավական քիչ, համաձայնեց: Տուժե՞ց առևտրականը, և եթե այո՝ ինչքա՞ն»:

ԽՆԴԻՐՆԵՐ 7-9 ԴԱՍԱՐԱՆԻ ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԻ ԴԱՍԸՆԹԱՑԻ ԿՐԿՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ

Հաշվեք (411-412).

411. ա) $\dfrac{\left(\dfrac{1}{6}+0{,}1+\dfrac{1}{15}\right):\left(\dfrac{1}{6}+0{,}1-\dfrac{1}{15}\right)}{\left(0{,}5-\dfrac{1}{3}+0{,}25-\dfrac{1}{5}\right):\left(0{,}25-\dfrac{1}{6}\right)}$;

բ) $\dfrac{0{,}4+8:\left(5{,}3-0{,}8\cdot\dfrac{3}{8}\right)-5:2\dfrac{1}{2}}{1\dfrac{7}{8}\cdot 8-\left(8{,}9-2{,}6:\dfrac{2}{3}\right)}$;

գ) $\dfrac{\left(0{,}5:1{,}25+\dfrac{7}{5}:1\dfrac{4}{7}-\dfrac{3}{11}\right)\cdot 3}{\left(1{,}5+\dfrac{1}{4}\right):18\dfrac{1}{3}}$;

դ) $\dfrac{(0{,}6+0{,}425-0{,}005):0{,}01}{10{,}5+5\dfrac{1}{4}+3\dfrac{1}{6}+15\dfrac{1}{12}}\cdot 60$:

412. ա) $\dfrac{\left(\dfrac{3}{5}+0{,}425-\dfrac{1}{200}\right):0{,}01}{30{,}75+\dfrac{1}{12}+3\dfrac{1}{6}}:\dfrac{2}{3}$;

բ) $\dfrac{\dfrac{3}{4}\cdot\left(4{,}4-3{,}75+8\dfrac{7}{15}+8\dfrac{7}{60}\right)}{\left(3\dfrac{1}{2}-2{,}75\right):0{,}2}$;

գ) $\dfrac{\left(\dfrac{7}{2000}+0{,}0065\right):0{,}001}{\left(\dfrac{3}{3125}+0{,}00004\right)\cdot\dfrac{1}{0{,}0001}}$;

դ) $\dfrac{3\dfrac{1}{3}-\left(6\dfrac{1}{7}-5\dfrac{3}{4}\right):\dfrac{5}{7}}{8+0{,}375:0{,}5625}+0{,}625:\dfrac{5}{6}$:

413. Հաշվեք.

ա) $\dfrac{8{,}4 \cdot \left(1\dfrac{5}{8} + \dfrac{17}{18}\right) - 15\dfrac{59}{60}}{646{,}8 : 21}$; բ) $\dfrac{\left(1\dfrac{13}{16} + 1\dfrac{17}{24}\right) \cdot \dfrac{4}{13}}{28\dfrac{14}{15} : 2{,}8 - 4\dfrac{11}{12}}$;

գ) $\dfrac{4{,}58 + 6{,}275 : (1{,}25^3 - 1{,}25^2 \cdot 0{,}45)}{49{,}533 : 16{,}5 - 2{,}522}$;

դ) $\dfrac{1{,}476 + 2{,}08 \cdot 4{,}05}{49{,}938 : (0{,}16 \cdot 12{,}34^2 - 0{,}16^3) - 0{,}25}$;

ե) $\dfrac{42{,}5904 : 6{,}08 - 1{,}245}{(18{,}2^2 - 5{,}6^2 + 23{,}8 \cdot 7{,}4) : 5{,}95 + 35{,}2}$:

414. Հաշվեք արտահայտության արժեքը.

ա) $3\dfrac{5}{14} - 1\dfrac{11}{49} : \left(76 \cdot \dfrac{25}{38} - 47\dfrac{3}{7}\right) \cdot \dfrac{12}{55}$;

բ) $\left(6\dfrac{9}{16} - 2\dfrac{1}{2} \cdot 1\dfrac{9}{14}\right) \cdot 0{,}56 : 0{,}75 : 6\dfrac{2}{3}$:

415. Ապացուցեք, որ կոտորակի արժեքը 0 է.

ա) $\dfrac{(1{,}08 - 1{,}33) \cdot 18 + 0{,}6 : \dfrac{2}{15}}{20{,}1 \cdot 0{,}1 - 2{,}1}$; բ) $\dfrac{(2{,}14 - 1{,}39) \cdot 1{,}2 - 0{,}75 : \dfrac{5}{6}}{12{,}1 : 0{,}1 - 1{,}2}$:

416. Հաշվեք.

ա) $\dfrac{(35{,}814 : 7{,}05 + 2{,}12) \cdot 0{,}15}{1{,}6 + 187{,}5 : (16{,}25^2 \cdot 3{,}75 - 3{,}75^3)}$;

բ) $\dfrac{(0{,}733 - 0{,}73 \cdot 0{,}272) : 0{,}023 + 2{,}4}{(18{,}544 : 3{,}05 - 1{,}83) \cdot 0{,}16}$:

417. Համեմատեք.

ա) 3 և 5; բ) 2,546 և 2,545; գ) –2 և –6;

դ) 2,(3) և 2,3; ե) $\dfrac{1}{4}$ և 0,25; զ) 0,12(5) և $\dfrac{1}{8}$;

է) $-\dfrac{1}{3}$ և –0,(3); ը) $-\dfrac{2}{3}$ և –0,6; թ) $-\pi$ և –3,14;

ժ) $\sqrt{5}$ և 2,2; ի) $-\sqrt{3}$ և 3^{-2}; լ) –32 և 3^{-2}:

418. a և b թվերի համար գտեք c թիվ այնպես, որ $a < c < b$.

ա) $a = 0$, $b = 0{,}0123(1)$; բ) $a = 2{,}13(4)$, $b = 2{,}135$;

գ) $a = -1$, $b = 0{,}172$; դ) $a = -3{,}231$, $b = -1{,}17(35)$:

419. Ճի՞շտ է արդյոք անհավասարությունը.

ա) $0{,}75757 < 0{,}75 < 0{,}75758$;

բ) $3{,}023023 < 3{,}(023) < 3{,}023024$:

420. ա) $\dfrac{2^{-3} - \left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{2}}{2^{-2} + \left(-\dfrac{1}{5}\right)^{0} + \left(\dfrac{3}{4}\right)^{-1}}$; բ) $\dfrac{\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2} \cdot 3^{-1} + (-1{,}51)^{0}}{160 \cdot 2^{-2}}$:

421. ա) $2 - \dfrac{1000}{1001} + \dfrac{999}{1001} - \dfrac{998}{1001} + \dfrac{997}{1001} - \dfrac{996}{1001} + ... + \dfrac{1}{1001}$;

բ) $5 - \dfrac{1002}{1003} + \dfrac{1001}{1003} - \dfrac{1000}{1003} + \dfrac{999}{1003} - \dfrac{998}{1003} + ... + \dfrac{35}{1003}$;

422. Հաշվեք.

ա) $\dfrac{6^3 \cdot 5^2}{3^3 \cdot 2^4}$; բ) $\dfrac{10^3 \cdot 9^2}{6^3 \cdot 5^2}$; գ) $2{,}5^3 : 5^3$;

դ) $1{,}5^4 : 3^3$; ե) $\dfrac{\left(3\dfrac{1}{3}\right)^{3} \cdot (0{,}1)^3}{3}$; զ) $\dfrac{\left(1\dfrac{1}{2}\right)^{4} \cdot (0{,}2)^4}{0{,}15}$:

423. Համեմատեք թվերը.

$\dfrac{3^{1997} + 1}{3^{1998} + 1}$ և $\dfrac{3^{1998} + 1}{3^{1999} + 1}$:

424. Գրեք P = 3,1415926535... թվի մոտարկումը պակասորդով և ավելցուկով՝ 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001 ճշտությամբ: Յուրաքանչյուր դեպքում ի՞նչ կրկնակի անհավասարության է բավարարում P թիվը:

425. Հետևյալ թվերից որո՞նք են ռացիոնալ, և որո՞նք՝ իռացիոնալ.

ա) 0,3333; բ) 0,4(5);

գ) 0,232323...; դ) 0,57578888;

ե) 0; զ) 1,211211121111211...;

է) 2,718281828...; ը) 0,1234567891011121314...:

426. ա) Կլորացնելով թվերը մինչև հարյուրերորդական ճշտությամբ՝ գտեք դրանց գումարը.

1) $1{,}342 + 3{,}463$; 2) $5{,}(6) + 2{,}781$;
3) $12{,}(45) + 0{,}3112$; 4) $1{,}(3) + 5{,}(7)$:

բ) Գտեք արտադրյալի մոտավոր արժեքը՝ տրված թվերը և արդյունքը կլորացնելով մինչև առաջին նշանակալից թիվը.

1) $15 \cdot 2{,}(1)$; 2) $0{,}3 \cdot 0{,}(4)$;
3) $1{,}(1) \cdot 2{,}(1)$; 4) $2{,}(5) \cdot 0{,}(2)$:

427. Թվերը գրեք տասնորդական կոտորակների տեսքով և դասավորեք աճման կարգով՝ $\frac{20}{41}, \frac{15}{37}, \frac{5}{21}, \frac{17}{42}$:

428. ա) Թվերը գրեք աճման կարգով.
$3{,}(007)$; $-0{,}2303003000...$; $3{,}(0008)$; $3{,}(0009)$; $-0{,}23(1)$; $-0{,}231(07)$:

բ) Թվերը գրեք նվազման կարգով.
$-2{,}(05)$; $-2{,}0(5)$; $-0{,}00(1)$; $-0{,}(001)$; $-2\frac{1}{20}$; $-0{,}001$:

429. Կլորացրեք մինչև ստորակետից հետո երրորդ նշանակալից թիվը.

ա) $37{,}57891$; բ) $0{,}002576$; գ) $-117{,}00992$;
դ) $0{,}3(9)$; ե) $-31{,}72(13)$; զ) $0{,}00(08)$:

430. Գրեք տասնորդական կոտորակի տեսքով՝ 0,01 ճշտությամբ.

ա) $1\frac{2}{3}$; բ) $2\frac{5}{6}$; գ) $\frac{20}{41}$; դ) $\frac{5}{7}$:

431. ա) Եթե $5{,}23 \leqslant a \leqslant 5{,}27$, ապա ի՞նչի են հավասար դրա մոտարկումները ներքևից (պակասորդով) և վերևից (ավելցուկով):

բ) Եթե $0{,}28 \leqslant a \leqslant 0{,}258$, ապա կարո՞ղ է արդյոք a-ն հավասար լինել 0,2574, 0,2579, 0,256, 0,258:

Գործողություններ հանրահաշվական արտահայտությունների հետ.

Դիցուք՝ a, b, c, m, n, x, y, z - նշված են զրոյից տարբեր թվեր, որոնց համար արտահայտությունները իմաստ ունեն: Պարզեցրեք արտահայտությունը (432-439).

432. ա) $a^3 \cdot a$; բ) $a^5 \cdot a^7$; գ) $x^{10} \cdot x^{10}$;
դ) $x^0 \cdot x^4$; ե) $ab^2 \cdot a^2b$; զ) $a^2b^3 \cdot a^5b^7$;
է) $x^4y^5 \cdot xy$; ը) $x^0y^{10} \cdot x^0y^3$:

433. ա) $x^4 : x^3$; բ) $x^2 : x$; գ) $m^{17} : m^8$; դ) $m^{41} : m^{14}$;
ե) $\frac{m^6}{m^3}$; զ) $\frac{n^3}{n^3}$; է) $\frac{a^{11}}{a^{42}}$; ը) $\frac{b^{14}}{b^{14}}$:

434. ա) $(a^2)^3$; բ) $(x^3)^5$; գ) $(-x^2)^3$; դ) $(-a^3)^2$;
ե) $(2x^2)^2$; զ) $(3a^2)^3$; է) $\left(\frac{1}{3}c\right)^4$; ը) $(-2x^2)^3$:

435. ա) $(a^5 \cdot a^2 \cdot a) : (a^3 \cdot a^7)$; բ) $(x^4 \cdot x^3 \cdot x) : (x^3 \cdot x^6)$;
գ) $(ab^2)^3 : (a^2b^4)$; դ) $(m^3n^5)^3 : (m^9n^{15})$:

436. ա) $m^{-1} \cdot m^2$; բ) $x^{-2} \cdot x^{-3}$; գ) $a^{-10} \cdot a^{-10}$;
դ) $b^0 \cdot b^{-4}$; ե) $y^3 : y^{-2}$; զ) $x^{-2} : x^{-3}$;
է) $a^{-10} : a^{-10}$; ը) $b^3 : b^{-4}$:

437. ա) $(2ab^2c^3)^3$; բ) $(3a^4x^5)^2$;
գ) $(-(-a^2b^{-1})^{-1})^3$; դ) $(2(-x^2y^3)^{-1})^{-2}$:

438. ա) $\frac{48m^2ab}{26ma^2b^3}$; բ) $\frac{64xy^3z^5}{18x^2yz^3}$;
գ) $\frac{128a^0b^{-3}c^9}{32a^6b^{-2}c^{-9}}$; դ) $\frac{121x^3y^0z^{-5}}{77x^{-8}y^{-4}x^{-2}}$:

439. ա) $\frac{38a^7b^4c^{12}}{144ab^6c^3}$; բ) $\frac{144xy^9z^{11}}{24x^5y^7z}$;
գ) $\left(\frac{(5a^3(b+c))^2 \cdot (c-b)^2}{(b^2+2bc+c^2) \cdot 10a^4}\right)^{-1}$; դ) $\frac{(-1(-2a)^2 \cdot b)^2}{(-2a^2)^3 \cdot b^4}$:

440. Գտեք արտահայտության արժեքը.
ա) $b^2 - 4ac$, երբ $b = 1$, $a = 0$, $c = 2$;

բ) $b^2 - 4ac$, երբ $b = \frac{1}{3}$, $a = -1$, $c = 4$:

441. Ձևափոխեք արտահայտությունը և հաշվեք արժեքը.

ա) $x^2 - 2xy + y^2$, երբ $x = 0{,}65$, $y = 0{,}15$;

բ) $5a^2 - 10ab + 5b^2$, երբ $a = 124$, $b = 24$;

գ) $\frac{1}{2}m^2 + mn + \frac{1}{2}n^2$, երբ $m = 64$, $n = 36$;

դ) $ax^2 + 2axy + ay^2$, երբ $a = 4$, $x = 71$, $y = 29$:

442. Բազմանդամը վերլուծեք արտադրիչների.

ա) $x^4 + 1$;
բ) $x^3 - 7x - 6$:

443. Վերլուծեք արտադրիչների.

ա) $m^3 - 4m^2 + 20m - 125$;
բ) $8 - 2p + 3p^2 - 27p^3$;
գ) $(x^2 + 4x)^2 - (x - 9)^2$;
դ) $(9x^2 + 2)^2 - (6x + 7)^2$;
ե) $(5a - 7b)^2 - 2(5a - 7b) + 1$;
զ) $1 + 2(x - 3y) + (x - 3y)^2$:

444. Ապացուցեք նույնությունը.

ա) $2x^3 - (x - 2)(2x^2 - 3x + 4) = 7x^2 - 10x + 8$;

բ) $2m^3 - (2m - 3)(m^2 - 7m + 2) - 6 = 17m^2 - 25m$;

գ) $(a - 2)^2 - 2a(a - 2) + a^2 = 4$;

դ) $x^2 - 2x(x - 3) + (x - 3)^2 = 9$;

ե) $5x(x - y) - 2(y - x)^2 = (3x + 2y)(x - y)$;

զ) $(a - 1)(a^2 + 1)(a + 1) - (a^2 - 1)^2 = 2(a^2 - 1)$;

է) $(a^2 + 1)^2 + (a - 1)(a^2 + 1) - a^2 = a(a^3 + a^2 + 1)$;

ը) $(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1) - (x^2 - 1)^3 = 3x^2(x^2 - 1)$:

445. Բազմանդամը վերլուծեք արտադրիչների.

ա) $x^2 - x$;
բ) $2a - ab$;
գ) $3m - m^3$;
դ) $p^2 - pq$;
ե) $x^2 - 4$;
զ) $9 - a^2$;
է) $4y^2 - x^2$;
ը) $m^2 - 16n$;
թ) $a^2 - 3$;
ժ) $x^2 - 5$;
ի) $7 - 2m^2$;
լ) $9 - 5x^2$:

446. Արտահայտությունը ձևափոխեք բազմանդամի.

ա) $6(3a + 4b) - 4(5a - b) + (a + b)$;

բ) $2(p + q) + 3(p - q) - (p + q) - (p - 5q)$;

գ) $(2a - 3)(3a - 1) - (4a + 2)(a - 3)$;

դ) $(m - 1)(m + 2) - (m - 3)(m + 4)$;

ե) $2(x+1)(x+2)-(3x-4)(x+2)$;
զ) $3(-4a+1)(a-1)+2(3a-4)(a+2)$:

447. Վերլուծեք արտադրիչների.

ա) $a(x+y)+b(x+y)$;
բ) $a(x+y)-b(x+y)$;
գ) $2x(3p-q)-(3p-q)$;
դ) $m(x+y)-x-y$;
ե) $n(x-y)-x+y$;
զ) $ax+ay+(bx+by)$;
է) $ac+ad-bc-bd$;
ը) $ac-cx+a-x$;
թ) $ax-a+x-1$;
ժ) $2ax-3bx-2ay+3by$;
ի) $ax-bx+cx+ay-by+cy$;
լ) $2ax-5ay+a-2bx+5by-b$:

448. Վերլուծեք արտադրիչների.

ա) $x^2-a^2x+\frac{1}{4}(a^4-b^4)$;
բ) $4x^2-12bx-4a^2+9b^2$;
գ) $4x^2-3ax+\frac{1}{4}(2a^2-ab-b^2)$;
դ) $8x^2-\frac{2a}{b}(1-2b)x-\frac{a^2}{b}$;
ե) $x^2-\frac{a^2+b^2}{ab}x+1$;
զ) $x^2+\frac{a^2+b^2}{ab}x+1$:

449. Պարզեցրեք արտահայտությունը.

ա) $\frac{6a}{4-9a^2}+\frac{1}{3a-2}$;
բ) $\frac{x^2+y^2}{x^3+y^3}-\frac{1}{2x+2y}$;
գ) $\frac{1}{2x-2}+\frac{1}{3x-3}$;
դ) $\frac{a}{ax-bx}-\frac{b}{ay-by}$;
ե) $2-\frac{3}{a-3}$;
զ) $\frac{(x-y)^2}{2x}+y$;
է) $\left(\frac{x}{5}-\frac{y}{3}\right)\cdot\left(\frac{5}{x}+\frac{3}{y}\right)$;
ը) $\left(\frac{x}{y}-\frac{2}{3}\right):\left(3x-2y\right)$;
թ) $\left(a^2-\frac{1}{b^2}\right):\left(a-\frac{1}{b}\right)$;
ժ) $\left(4x^2-\frac{1}{9b^2}\right):\left(2x-\frac{1}{3b}\right)$:

450. Պարզեցրեք արտահայտությունը և հաշվեք արժեքը տառի տրված արժեքի դեպքում.

ա) $\left(\frac{m^3+1}{m+1}-m\right):(1-m^2)-\frac{m}{1+m}$, երբ $m=-\frac{1}{3}$;

բ) $\left(\frac{a^3-8}{a-2}+2a\right):(4-a^2)-\frac{a-1}{2-a}$, երբ $a=\frac{2}{5}$:

451. Ապացուցեք հանրահաշվական հավասարությունը.

ա) $\frac{5x}{x+y}\cdot\left(\frac{xy+y^2}{5x-5y}+xy+y^2\right)-\frac{xy}{x-y}=5xy;$

բ) $\frac{a-5}{6-3a}+\frac{4(a+1)}{a^2+4a}:\left(\frac{9a}{a^2-16}-\frac{a+4}{a^2-4a}\right)=\frac{1}{6}$։

452. Ապացուցեք, որ տրված արտահայտությունները բոլոր իրական թվերի բազմության վրա նույնաբար հավասար չեն.

ա) $\frac{(x-3)^3}{2}-\frac{(x+3)^3}{2}$ և $-\frac{9(x^2+3)}{4};$

բ) $\left(\frac{x-3}{3}\right)^3+\left(\frac{x+3}{3}\right)^3$ և $\frac{x(x^2+27)}{27}$։

Պարզեցրեք արտահայտությունը (453-471)

453. ա) $\left(\frac{x}{x-y}-\frac{x}{x+y}\right):\frac{xy}{x^2-y^2};$ բ) $\left(\frac{m+1}{m-1}-\frac{m-1}{m+1}+4m\right)\left(m-\frac{1}{m}\right)$։

454. ա) $\left(\frac{y}{x-y}+\frac{x}{x+y}\right)\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-2\right);$

բ) $\left(\frac{x^2y-y^2x}{x-y}+xy\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{y}\right)$։

455. ա) $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(x-y)+(x+y)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right);$

բ) $\left(\frac{y}{x}-\frac{x}{y}\right):\left(2-\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right):\left(\frac{y}{x}+1\right)$։

456. ա) $\left(\frac{k+1}{k-1}-\frac{k-1}{k+1}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{k}{4}-\frac{1}{4k}\right);$

բ) $\frac{m^3+m^2n+mn^2+n^3}{m^2+2mn+n^2}:\frac{m^4-n^4}{(m+n)^3}$։

457. ա) $\frac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\frac{b+c}{(a-c)(b-a)}-\frac{a+c}{(a-b)(c-b)};$

բ) $\frac{1}{(m-n)(n-p)}+\frac{1}{(p-n)(n-q)}+\frac{1}{(q-n)(n-m)};$

գ) $\frac{1}{(x-y)(y-z)}-\frac{1}{(z-y)(z-x)}+\frac{1}{(y-x)(x-z)};$

դ) $\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}$; ե) $\dfrac{m^2-n^2}{m^2+n^2}+\dfrac{m^2+n^2}{m^2-n^2}-2$:

458. ա) $\left(x^2-\dfrac{1+x^4}{x^2-1}\right):\dfrac{x^2+1}{x+1}$; բ) $\left(a^2-\dfrac{1+a^4}{a^2+1}\right):\dfrac{1-a}{1+a^2}$;

գ) $\left(\dfrac{1}{m^2-m}-\dfrac{1}{m-1}\right)\cdot\dfrac{1}{m+2}+\dfrac{m}{m^2-4}$;

դ) $\left(\dfrac{k+4}{3k+3}-\dfrac{1}{k+1}\right)\cdot\dfrac{3}{k+1}-\dfrac{2}{1-k^2}$;

ե) $\dfrac{2c}{c^2-4}-\dfrac{1}{c-2}:\left(\dfrac{c+1}{2c-2}-\dfrac{1}{c-1}\right)$;

զ) $\dfrac{y^2}{y^2-1}+\dfrac{1}{y+1}:\left(\dfrac{1}{2-y}-\dfrac{2}{2y-y^2}\right)$;

է) $\dfrac{5p+6}{p^2-4}-\dfrac{p}{p^2-4}:\dfrac{p}{p-2}-\dfrac{p+2}{p-2}$;

ը) $\dfrac{21-5a}{a^2-9}-\dfrac{a}{a^2-9}:\dfrac{a}{a+3}-\dfrac{a-3}{a+3}$:

459. ա) $\left(\dfrac{4(a-2)}{a^2-a-6}+\dfrac{a-3}{4-a^2}\right)\cdot\dfrac{a^2-4}{a-1}-\dfrac{2}{a-3}$;

բ) $\dfrac{3}{y-2}+\dfrac{3y+12}{25-y^2}:\left(\dfrac{2y-1}{y^2-25}-\dfrac{y-5}{2y^2+9y-5}\right)$;

գ) $\left(\dfrac{a}{a^2-4}-\dfrac{8}{a^2+2a}\right)\cdot\dfrac{a^2-2a}{4-a}+\dfrac{a+8}{a+2}$;

դ) $\left(\dfrac{1}{a^2-4a}-\dfrac{a+3}{a^2-16}\right)\cdot\dfrac{4a-a^2}{a+2}+\dfrac{a+8}{a+4}$;

ե) $\left(\dfrac{a+3b}{(a-b)^2}-\dfrac{a-3b}{a^2-b^2}\right):\dfrac{a^2+3b^2}{(a-b)^2}$;

զ) $\left(\dfrac{a+2b}{(a+b)^2}-\dfrac{a-4b}{a^2-b^2}\right)\cdot\dfrac{b^2+2ab}{(a+b)^2}$:

460. ա) $\left(1-\dfrac{1-a}{1+a}\right):\left(1+\dfrac{1-a}{1+a}\right)$; բ) $\left(\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{x}{x+y}\right):\dfrac{xy}{x^2-y^2}$;

գ) $\dfrac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}}$; դ) $\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}{\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{x^2}}$;

461. ա) $\left(\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\right):\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\right)$;

բ) $\frac{a-2}{a(a-2)+4}+\frac{8+4(1-a)+a^2}{8+a^3}-\frac{1}{2+a}$:

462. ա) $a:\frac{a-1}{2}-\frac{a^2+3a(a-1)-1}{2a^2+2a}\cdot\frac{-4a}{a^2+1-2a}-\frac{4a^2}{a^2-1}$;

բ) $\left(\frac{3}{2}-\left(x^4-\frac{x^4+1}{x^2+1}\right)\cdot\frac{x^3-x(4x-1)-4}{x^7+6x^6-x-6}\right):\frac{x^2+29x+78}{3x^2+12x-36}$:

463. ա) $\left(\frac{x^2-x-6}{x^2-4}-\frac{x^2-4x-5}{x^2-7x+10}\right):\frac{4x+16}{x-2}$;

բ) $\left(\frac{x^2-3x-10}{x^2-25}-\frac{x^2+x-12}{x^2-8x+15}\right):\frac{4x+10}{5-x}$:

464. ա) $\frac{5}{2a-2b}+\frac{3}{4b-4a}-\frac{5}{a-b}$; բ) $\frac{x+y}{x-y}-\frac{y}{y-x}+\frac{x}{x-y}$;

գ) $\frac{4m}{2m-3n}-\frac{5n}{3n-2m}-\frac{3m}{4m-6n}$;

դ) $\frac{1}{x+y}+\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}-\frac{x(x-y)}{x^3+y^3}$:

465. ա) $\frac{1}{x-1}-\frac{4}{1-x}-\frac{8}{1+x}+\frac{3x-7}{x^2-1}$;

բ) $\frac{4m}{a-b}-\frac{5n}{a^2+ab+b^2}-\frac{3m}{a^3-b^3}$;

գ) $\frac{1}{x+y}+\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}-\frac{x(x-y)}{x^3+y^3}$:

466. ա) $\frac{1}{a+b}+\frac{a-b}{a^2-ab+b^2}-\frac{a(a-b)}{a^3+b^3}$;

բ) $\frac{x}{x-y}+\frac{y^2}{x^2+xy+y^2}-\frac{xy(x+2y)}{x^3-y^3}$;

467. ա) $\frac{a^2-5a+6}{a^2+5a+4}:\frac{a^2-4a+3}{2a^2+3a+1}\cdot\frac{a^2+3a-4}{2a^2-3a-2}$;

բ) $\frac{c^3-8}{c+3}:\left(\frac{c-2}{4c}\cdot\frac{8c^3}{c^2+3c}\right):\frac{c^2+2c+4}{2(3-c)}$:

468. ա) $\dfrac{a^3 - a^2b - ab^2 - 2b^3}{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 2b^3}$; բ) $\dfrac{4b^4 + 11b^2 + 25}{4b^4 - 9b^2 + 30b - 25}$:

469. ա) $-\dfrac{48}{a^3 + 64} + \dfrac{1}{a + 4} + \dfrac{4}{a^2 - 4a + 16}$;

բ) $\dfrac{1}{x^2 + 3x + 2} - \dfrac{2}{(x + 1)(x^2 + 5x + 6)}$:

470. ա) $\dfrac{p^2 - q^2}{(p + q)^2} : \dfrac{6p - 6q}{3p + 3q}$; բ) $\dfrac{3m^2 - 3n^2}{m^2 + mn} \cdot \dfrac{m + n}{9m - 9n}$;

գ) $\dfrac{a^2 + ab}{4a^2 - 4b^2} \cdot \dfrac{2a^3 + 2b^3}{a^2 - ab}$; դ) $\dfrac{x^2 - 4y^2}{(x + 2y)^2} : \dfrac{x^3 - 8y^3}{4y^2 - 2xy + x^2}$;

471. ա) $\dfrac{3x^2 + 3xy}{4xy + 6ay} \cdot \left(\dfrac{x}{ax + ay} + \dfrac{3}{2x + 2y}\right)$;

բ) $\left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{2}{a + b} \cdot \left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)\right) : \dfrac{(a + b)^2}{ab}$;

գ) $\left(\dfrac{x - 1}{3x + (x - 1)^2} - \dfrac{1 - (3x + x^2)}{x^3 - 1}\right) : \dfrac{1 - 2x + x^2 - 2x^3}{1 + 2x + 2x^2 + x^3}$;

դ) $\left(\dfrac{a^2 - ax}{a^2x + x^3} - \dfrac{2a^2}{x^3 - ax^2 + a^2x - a^3}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{x - 1}{a} - \dfrac{x}{a^2}\right)$:

Գտեք արտահայտության արժեքը (472-474).

472. ա) $(a^2 - 1) \cdot \left(\dfrac{1}{a - 1} - \dfrac{1}{a + 1} + 1\right)$ երբ $a = -0{,}03$;

բ) $\left(\dfrac{1}{p + 1} - \dfrac{3}{p^3 + 1} + \dfrac{3}{p^2 - p + 1}\right) \cdot \left(p - \dfrac{2p - 1}{p + 1}\right)$ երբ $p = -\dfrac{1}{3}$:

473. ա) $\left(\dfrac{4x}{4 - x^2} - \dfrac{x - 2}{4 + 2x}\right) \cdot \dfrac{4}{x + 2} - \dfrac{x}{1 - x^2}$ երբ $x = -1{,}5$;

բ) $\dfrac{a}{1 - a} - \dfrac{1 - a^2}{1 + a^2} \cdot \left(\dfrac{1}{(a - 2)^2} - \dfrac{a}{1 - a^2}\right)$ երբ $a = 2{,}5$:

474. ա) $\left(\dfrac{9}{m^2 - 9} + \dfrac{3}{(3 - m)^2}\right) \cdot \dfrac{(m - 3)^2}{6} + \dfrac{6}{3 + m}$ երբ $m = 2\dfrac{1}{2}$;

բ) $\left(\dfrac{2}{4 - p^2} - \dfrac{2}{(p - 2)^2}\right) \cdot \dfrac{(2 - p)^2}{4} - \dfrac{2}{p + 2}$ երբ $p = 1{,}5$:

475. Ապացուցեք, որ $\dfrac{a+1}{a-1} - \dfrac{b+1}{b-1} = 2$, եթե $2b = 1 + ab$ և $a \neq 1$, $b \neq 1$:

476. Ապացուցեք, որ եթե $\dfrac{a+b+c}{a+b-c} = \dfrac{a-b+c}{a-b-c}$, ապա $bc = 0$:

Դիցուք, x և a տառերով նշված են թվեր, որոնց համար արտահայտությունները իմաստ ունեն: Պարզեցրեք արտահայտությունները (477-478).

477. ա) $\dfrac{1}{x(x+1)} + \dfrac{1}{(x+1)(x+2)} + \dfrac{1}{(x+2)(x+3)} + \dfrac{1}{(x+3)(x+4)} +$

$+ \dfrac{1}{(x+4)(x+5)}$;

բ) $\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{1+x^2} + \dfrac{4}{1+x^4} + \dfrac{8}{1+x^8} + \dfrac{16}{1+x^{16}}$:

478. ա) $(1-(1-a^{-1}b)^{-1})^{-2} + (1-(1-ab^{-1})^{-1})^{-2}$;

բ) $(a+\sqrt{a^2-1})^{-1} + (a-\sqrt{a^2-1})^{-1}$:

479. Ապացուցեք, որ եթե $\mathrm{ABC} = 1$, ապա

$$\frac{1}{1+\mathrm{A}+\mathrm{AB}} + \frac{1}{1+\mathrm{AC}+\mathrm{C}} + \frac{1}{1+\mathrm{B}+\mathrm{BC}} = 1:$$

480. Կոորդինատային ուղղի վրա պատկերեք թվերը.

ա) $\sqrt{2}$ և 1,4; բ) 1,7 և $\sqrt{3}$;

գ) $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}+1$; դ) $\sqrt{11}$; 3,2; $\sqrt{13}$:

481. Հաշվեք.

ա) $\left(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)\left(\sqrt{6} - \sqrt{2} - 2\sqrt{3}\right) + 8\sqrt{3} - 4\sqrt{6}$;

բ) $\left(\sqrt{8} - 3\sqrt{2} + \sqrt{10}\right)\left(\sqrt{2} + \sqrt{5}\right) - 2\sqrt{5} + \sqrt{10} - 5\sqrt{2}$:

482. Ապացուցեք թվի իռացիոնալ լինելը.

ա) $\sqrt{80}$; բ) $\sqrt{972}$; գ) $\sqrt{1152}$;

դ) $\sqrt{2484}$; ե) $\sqrt{125786}$; զ) $\sqrt{2800848}$:

Կատարեք գործողությունները.

483. ա) $\left(2\sqrt{38} - \sqrt{57}\right) \cdot \dfrac{2}{19} \cdot \sqrt{19} + \sqrt{12}$;

բ) $\left(\sqrt{14} - 2\sqrt{35}\right) \cdot \frac{1}{7} \cdot \sqrt{7} + \sqrt{20}$;

գ) $\sqrt{200} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{32} + 2\sqrt{72}$;

դ) $\frac{1}{5}\sqrt{300} - \frac{2}{3}\sqrt{27} + \sqrt{75}$:

484. Իմաստ ունի՞ արտահայտությունը.

ա) $\sqrt{-4}$; բ) $\sqrt{1 - \sqrt{2}}$; գ) $\sqrt{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$;

դ) $\sqrt{2 - \sqrt{4}}$; ե) $\sqrt{10 - \sqrt{121}}$; զ) $\sqrt{3 - \sqrt{17}}$:

485. Հաշվեք.

ա) $\left(\frac{15}{\sqrt{6} - 1} + \frac{4}{2 - \sqrt{6}}\right) \cdot \left(\sqrt{6} + 1\right)$;

բ) $\left(\frac{4 \cdot 2^2 + 9 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-2\,-2}}{80 + \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{24}\right)^{-1}} + (1 - 30)^2\right)$:

486. Տառերի տրված արժեքների դեպքում արտահայտությունն իմաստ ունի՞.

ա) $\sqrt{b^2 - 4}$, երբ $b = 3$, $b = -2$, $b = 0$;

բ) $\sqrt{b^2 - 4a}$, երբ $b = 1$, և $a = 4$, $b = \frac{1}{2}$, և $a = -2$;

գ) $\sqrt{b^2 - 4ac}$, երբ $b = 3$, $a = \frac{1}{2}$, $c = -3$;

դ) $\sqrt{b^2 - 4ac}$, երբ $b = \frac{1}{2}$, $a = -2$, $c = 7$;

ե) $\frac{-b + a}{2m}$, երբ $b = 3$, $a = 2$, $m = 1$;

զ) $\frac{-b - a}{m}$, երբ $b = -2$, $a = 3$, $m = -1$;

է) $-\frac{b}{2a}$, երբ $b = -\frac{1}{2}$, $a = -3$:

487. Պարզեցրեք.

ա) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$; բ) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$; գ) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$;

դ) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$; ե) $\sqrt{17-4\sqrt{13}}$; զ) $\sqrt{17+4\sqrt{13}}$;

է) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$; ը) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$; թ) $\sqrt{12-2\sqrt{35}}$:

Ապացուցեք հետևյալ հավասարությունները (488-489).

488. ա) $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}=1$;

բ) $\sqrt{6+2\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}=\sqrt{3}+1$:

489. ա) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\dfrac{2+\sqrt{6}-\sqrt{10}}{2}$;

բ) $\dfrac{6}{3+\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\dfrac{3\left(3\sqrt{2}-4\right)\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{2}$:

490. Էվկլիդեսի խնդիրը. ապացուցեք հավասարությունը.

$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$:

491. Արքիմեդի խնդիրը. ճի՞շտ է արդյոք

$\dfrac{265}{163}<\sqrt{3}<\dfrac{1351}{180}$

անհավասարությունը:

492. Ապացուցեք, որ

ա) $5<\sqrt{26}$; բ) $3<\sqrt{13}$; գ) $\sqrt{7}<2{,}7$;

դ) $\sqrt{11}<3{,}4$; ե) $1{,}09<\sqrt{1{,}2}<1{,}1$; զ) $1{,}4<\sqrt{2{,}1}<1{,}45$:

493. Թվերից ո՞րն է մեծ.

ա) π կամ $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; բ) $\sqrt{7}+\sqrt{3}$ կամ $\sqrt{8}+\sqrt{2}$:

494. Արտադրիչը դուրս բերեք արմատանշանի տակից.

ա) $\sqrt{8}$; բ) $\sqrt{28}$; գ) $\sqrt{320}$; դ) $\sqrt{32}$;

ե) $\sqrt{175}$; զ) $\sqrt{96}$; է) $\sqrt{12\dfrac{1}{2}}$; ը) $\sqrt{\dfrac{1}{0{,}75}}$:

495. Արտադրիչը մտցրեք արմատանշանի տակ.

ա) $5\sqrt{0,6}$; բ) $11\sqrt{\frac{2}{11}}$; գ) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$; դ) $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{6}{5}}$:

496. Կոտորակը ձևափոխեք այնպես, որ հայտարարն արմատանշան չպարունակի.

ա) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; բ) $\frac{3}{\sqrt{3}}$; գ) $\frac{2}{\sqrt{2}}$;

դ) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; ե) $\frac{1}{3+\sqrt{7}}$; զ) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$:

Պարզեցրեք արտահայտությունը (497-499).

497. ա) $\sqrt{8}+5\sqrt{9}-3\sqrt{8}+5\sqrt{7}+2\sqrt{8}-6\sqrt{7}$;

բ) $7\sqrt{12}-5\sqrt{27}+8\sqrt{48}-6\sqrt{75}+2\sqrt{108}$;

գ) $2\sqrt{3}-\sqrt{27}+3\sqrt{12}-2\sqrt{243}$; դ) $\sqrt{50}-5\sqrt{8}+\sqrt{2}+\sqrt{128}$:

498. ա) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}$; բ) $\sqrt{10}\cdot\sqrt{15}$;

գ) $\sqrt{60}:\sqrt{5}$; դ) $\sqrt{72}\cdot\sqrt{30}$:

499. ա) $\left(\left(7\sqrt{2}-5\sqrt{6}\right)-\left(3\sqrt{8}-4\sqrt{24}\right)\right)\cdot 3\sqrt{2}$;

բ) $\left(\left(2\sqrt{20}-7\sqrt{8}\right)-\left(3\sqrt{5}-3\sqrt{18}\right)\right)\cdot 4\sqrt{10}$:

500. Ապացուցեք հավասարությունը.[1]

ա) $\frac{\sqrt{a}+6}{a-36}-\frac{1}{\sqrt{a}+6}=\frac{12}{a-36}$;

բ) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-6}-\frac{3}{\sqrt{x}+6}+\frac{x}{36-x}=\frac{3}{\sqrt{x}-6}$:

501. Արտադրիչը մտցրեք արմատանշանի տակ.

ա) $(a-1)\sqrt{\frac{3a}{1-a^2}}$, $0<a<1$; բ) $(2-a)\sqrt{\frac{2a}{a-2}}$, $a>2$:

---

[1] Այստեղ և հետագայում տառերով նշանակված են թվեր, որոնց համար դիտարկվող արտահայտությունն իմաստ ունի:

502. Պարզեցրեք արտահայտությունը.

ա) $\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}+1\right):\left(1-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)$;   բ) $\left(a-\dfrac{1}{1+\sqrt{a}}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{a}+1}{1-\sqrt{a}-a}$;

գ) $\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x-y}$;   դ) $\dfrac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}-7}-\dfrac{4}{\sqrt{m}+7}+\dfrac{m}{49-m}$:

503.* Ապացուցեք հավասարությունը.

$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{m}+\sqrt{n}$ և $\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{m}-\sqrt{n}$,

որտեղ $m=\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}$, $n=\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}$:

504.* Օգտագործելով նախորդ կետում դիտարկված հավասարությունը՝ պարզեցրեք արտահայտությունը.

ա) $\sqrt{8+\sqrt{28}}$;   բ) $\sqrt{9-\sqrt{17}}$;

գ) $\sqrt{7+2\sqrt{6}}$;   դ) $\sqrt{11-2\sqrt{10}}$:

505.* Եթե հնարավոր է, նշեք բնական թիվ, որի քառակուսի արմատը գտնվում է տրված թվերի միջև.

ա) 4000 և 4001;   բ) 400,0 և 400,1;   գ) 40,00 և 40,01;
դ) 1002 և 1003;   ե) 100,2 և 100,3;   զ) 10,02 և 10,03:

506. Պարզեք՝ x-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում արտահայտությունն իմաստ ունի, և պարզեցրեք.

$\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2\cdot\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)$:

507. Գտեք արտահայտության արժեքը՝ իմանալով, որ այն ամբողջ թիվ է.

ա) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}$;   բ) $\sqrt{11-4\sqrt{7}}-\sqrt{8+2\sqrt{7}}$;

գ) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}$;   դ) $\sqrt{7+2\sqrt{6}}-\sqrt{10-4\sqrt{6}}$:

508. ***Բհասկարայի խնդիրը*** (Հնդկաստան, XII դ.) Ապացուցեք, որ

$\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$:

509. ա) Ի՞նչ թիվ կարելի է ավելացնել բաժանելիին (մնացորդով բաժանման դեպքում), որպեսզի քանորդը չփոխվի:
բ) Ի՞նչ թվեր կարելի է գումարել բաժանելիին և բաժանարարին (մնացորդով բաժանման դեպքում), որպեսզի քանորդը և մնացորդը չփոխվեն:

510. ա) Ապացուցեք, որ եթե երկու բնական թվերից յուրաքանչյուրը 4-ի բաժանելիս ստացվում է 1 մնացորդ, ապա դրանց արտադրյալը 4-ի բաժանելիս կստացվի 3 մնացորդ:
բ) Ապացուցեք, որ հինգ իրար հաջորդող բնական թվերի արտադրյալը բաժանվում է 120-ի:

511. ա) Ապացուցեք, որ եթե a-ն ամբողջ թիվ է, ապա $\dfrac{a^3-a}{6}$-ը նույնպես ամբողջ թիվ է:
բ) Ապացուցեք, որ երկու իրար հաջորդող զույգ թվերի քառակուսիների տարբերությունը բաժանվում է 4-ի:
գ) Ապացուցեք, որ ցանկացած երկու կենտ թվերի քառակուսիների տարբերությունը բաժանվում է 8-ի:

512. Ապացուցեք, որ $(10^{27}+5)$ թիվը բաժանվում է 3-ի:

513. ա) Ո՞ր երկնիշ թվի թվանշանների գումարի կրկնապատիկն է հավասար թվանշանների արտադրյալին:
բ) Գտեք a-ի այն բոլոր ամբողջ արժեքները, որոնց դեպքում $\dfrac{a^3+1}{a-1}$ կոտորակն ընդունում է ամբողջ արժեքներ:

514. Ապացուցեք, երկու իրար հաջորդող բնական թվերի արտադրյալը չի կարող հավասար լինել $25k+1$, որտեղ k-ն բնական թիվ է:

515. Տրված է x^3-5x^2+8x բազմանդամը: Հայտնի է, որ եթե x-ի արժեքը մեծացվի 1-ով, բազմանդամի արժեքը չի փոխվի: Գտեք x-ի այդ արժեքը:

516. Ապացուցեք, որ եթե բնական թիվը 9-ի վրա բաժանելիս մնացորդում ստացվում է 1 կամ 8, ապա այդ թվի քառակուսին 9-ի բաժանելիս մնացորդում կստացվի 1:

517. ab-ն ներկայացրեք երկու արտահայտությունների քառակուսիների տարբերության տեսքով:

518. Գտեք այն երկնիշ թիվը, որը հավասար է իր թվանշանների արտադրյալի կրկնապատիկին:

519. Գտեք x և y-ը՝ իմանալով, որ $xy = 1$ և $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$:

520. Գտեք $\overline{42a4b}$ հնգանիշ թվի a և b թվանշանները, եթե հայտնի է, որ այդ թիվը բաժանվում է 72-ի:

521. Ի՞նչ թվանշանով է վերջանում 7^{100} թիվը:

522. Ի՞նչ թվանշանով է վերջանում $21^4 + 34^4 + 46^4$ գումարը:

523. Ապացուցեք, որ եթե n-ը 1-ից մեծ կենտ թիվ է, ապա $n^{12} - n^8 - n^4 + 1$ տեսքի թիվը բաժանվում է 128-ի:

524. Ապացուցեք, որ կոորդինատային ուղղի այն կետերը, որոնք համապատասխանում են $\dfrac{n^5 + n^4 + n^3 + 2}{n^5 + n^4 + n^3 + 1}$ (n-ը բնական թիվ է) տեսքի թվերին, դասավորված են $\dfrac{1}{3}$-ից ոչ մեծ երկարությամբ հատվածում:

525. Երեք թվերի գումարը 254,772 է: Եթե դրանցից մեկում ստորակետը տեղափոխվի երկու թվանշան աջ, ապա կստացվի այդ թվերից ամենամեծը, իսկ եթե նույն թվում ստորակետը մեկ թվանշան տեղափոխվի ձախ, ապա կստացվի այդ թվերից ամենափոքրը: Գտեք այդ թվերը:

526. Երեք թվերի գումարը 3898,32 է: Եթե այդ թվերից մեկում ստորակետը տեղափոխվի մեկ թվանշան աջ, ապա կստացվի այդ թվերից ամենամեծը, իսկ եթե նույն թվում ստորակետը տեղափոխվի մեկ թվանշան ձախ, կստացվի այդ թվերից փոքրագույնը: Գտեք այդ թվերը:

527.* 7 հեռախոսներից յուրաքանչյուրը պետք է միացվի մյուսներից միայն երեքի հետ: Հնարավո՞ր է դա անել:

528. Կարո՞ղ են արդյոք երեք մարդ 36 կմ անցնել ոչ ավելի, քան 6 ժամում, եթե հետիոտնի արագությունը 5 կմ/ժ է, բայց նրանք ունեն հեծանիվ (որը նախատեսված է միայն մեկ մարդու համար), որով կարելի է շարժվել 15 կմ/ժ արագությամբ: Եթե պատասխանը դրական է, ապա նշեք լուծումը, իսկ եթե պատասխանը բացասական է, ապա հիմնավորեք այն:

529. Գրեք ընդհանուր բանաձև այն բնական թվերի համար, որոնք և՛ 3-ի, և՛ 4-ի վրա բաժանելիս մնացորդում ստացվում է 1:

530. Գրեք ընդհանուր բանաձև այն բնական թվերի համար, որոնք և՛ 10-ի, և՛ 7-ի վրա բաժանելիս մնացորդում ստացվում է 2:

531.* Գտեք պայման, որը տեղի ունենալու դեպքում տրված երկնիշ թվի և նույն թվանշաններով, բայց հակառակ կարգով գրված երկնիշ թվի գումարը բնական թվի քառակուսի է:

532.* Գտեք պայման, որը տեղի ունենալու դեպքում տրված երկնիշ թվի և նույն թվանշաններով, բայց հակառակ կարգով գրված երկնիշ թվի տարբերությունը բնական թվի քառակուսի է:

533. Ի՞նչ թվանշանով է վերջանում բոլոր կենտ երկնիշ թվերի արտադրյալը:

534. Քանի՞ 0-ով է վերջանում 1-ից 20 բնական թվերի արտադրյալը:

535. Կարո՞ղ է արդյոք երեք հաջորդական բնական թվերի գումարը լինել պարզ թիվ:

536. Ապացուցեք, որ երկու իրար հաջորդող զույգ թվերի գումարը չի բաժանվում 4-ի:

537. Ապացուցեք, որ եռանիշ թվի և նույն թվանշաններով, բայց հակառակ կարգով գրված եռանիշ թվի տարբերությունը բաժանվում է 9-ի: Բաժանվո՞ւմ է արդյոք այդ տարբերությունը 27-ի:

538. ա) Ապացուցեք, որ միևնույն թվանշաններով գրված եռանիշ թիվը բաժանվում է 37-ի:
բ) Ապացուցեք, որ միևնույն թվանշաններով գրված քառանիշ թիվը բաժանվում է 101-ի:

539. Ապացուցեք, որ k-ի ցանկացած ամբողջ արժեքի համար $k^3 + 3k^2 + 2k$ թիվը բաժանվում է 6-ի:

540. Ապացուցեք, որ եթե A-ն կենտ թիվ է, ապա $A^2 - 1$-ը բաժանվում է 8-ի:

541. Ապացուցեք, որ եթե եռանիշ թվի վերջին երկու թվանշանները նույնն են, իսկ բոլոր թվանշանների գումարը բաժանվում է 7-ի, ապա այդ եռանիշ թիվը նույնպես բաժանվում է 7-ի:

542. Ապացուցեք, որ եթե B-ն ամբողջ թիվ է, ապա $B^2 (B^2 - 1)$-ը բաժանվում է 4-ի:

543. Գտեք ամենափոքր բնական թիվը, որը 2-ով բազմապատկելիս դառնում է բնական թվի քառակուսի, իսկ 3-ով բազմապատկելիս՝ բնական թվի խորանարդ:

544. Վերծանեք ** + *** = **** հավասարությունը, եթե գումարելիներից յուրաքանչյուրը և գումարը չեն փոփոխվում աջից ձախ կարդալիս:

545. Եռանիշ թվի վերջին թվանշանը 3 է: Եթե այդ թվանշանը տեղափոխվի առաջին տեղը (հարյուրավորների թվանշանի տեղը), ապա ստացված թիվը 1-ով մեծ կլինի սկզբնական թվի եռապատիկից: Գտեք այդ թիվը:

546. Ամենաշատը քանի՞ միատեսակ ծաղկեփնջեր կարելի է կազմել 264 սպիտակ և 192 կարմիր վարդակակաչներից:

547. Երկու բնական թվերի գումարը մեծ է 360-ից, բայց փոքր է 400-ից: Այդ թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը 32 է: Գտեք այդ թվերը, եթե դրանցից ոչ մեկը մյուսի բաժանարարը չէ:

548. Գտեք երկու բնական թվեր՝ իմանալով, որ դրանց գումարը 168 է, իսկ ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը՝ 24:

549. Ապացուցեք, որ եթե $A + B + C = 0$, ապա $A^3 + B^3 + C^3 = 3ABC$:

550. ա) Ապացուցեք, որ եթե բնական թիվը 9-ի կամ 3-ի վրա բաժանելիս մնացորդում ստացվում է 6, ապա այդ թվի խորանարդը բաժանվում է 9-ի: Բաժանվո՞ւմ է արդյոք այդ խորանարդը 27-ի:
բ) Ապացուցեք, որ եթե թիվը 9-ի վրա բաժանելիս ստացվում է 1 մնացորդ, ապա քառակուսին 9-ի վրա բաժանելիս նույնպես ստացվում է 1 մնացորդ:

551. ա) Ապացուցեք, որ եթե k-ն 4-ից մեծ բնական թիվ է, ապա $k^4 - 4k^3 - 4k^2 + 16k$ թիվը բաժանվում է 384-ի:
բ) Ապացուցեք, որ եթե k-ն 2-ից մեծ բնական թիվ է, ապա $k^5 - 5k^3 + 4k$ թիվը բաժանվում է 120-ի:

552. Դպրոցական մաթեմատիկական վիկտորինայի մասնակիցներին առաջարկվեց 30 հարց: Յուրաքանչյուր ճիշտ պատասխանի համար տրվում էր 7 միավոր, իսկ սխալ պատասխանի համար՝ հանվում 12 միավոր: Քանի հարցի ճիշտ պատասխանեց մասնակիցը, եթե նա հավաքեց 77 միավոր:

553. Մարզի ֆուտբոլի առաջնությանը մասնակցում է 30 թիմ: Քանի՞ խաղ է խաղացվել, եթե յուրաքանչյուր թիմ մնացածի հետ խաղացել է մեկ անգամ:

554. ա) Հայտնի է, որ $x \neq 0$, $y \neq 0$: Կարելի՞ է արդյոք պնդել, որ $x + y \neq 0$:
բ) x-ի և y-ի ինչ արժեքների դեպքում է տեղի ունենում հավասարությունը.

1) $x + y = 0$; 2) $x \cdot y = 0$; 3) $\frac{x}{y} = 0$;
4) $\frac{x}{y} = -1$; 5) $x \cdot y = x$:

555. Լուծեք հավասարումը.
ա) $(x - 1)(x - 3) = 0$; բ) $(x - 5)(x - 2) = 0$;
գ) $(x + 4)(3 + x) = 0$; դ) $(7 + x)(x - 10) = 0$;
ե) $(2x - 1)(x + 1) = 0$; զ) $(x - 0,5)(3x + 4) = 0$;
է) $x(x - 1) = 0$; ը) $x(2x + 1) = 0$;
թ) $3x(2x - 7) = 0$; ժ) $5x(4x - 1) = 0$:

556. Համարելով m, n, a և b-ն տրված թվեր՝ լուծեք հավասարումը.
ա) $4m - 2x = 6n$; բ) $5x - 10a = 15b$;
գ) $(x - a)(x + b) = 0$; դ) $(a - x)(b - x) = 0$:

Լուծեք հավասարումը (557-558).

557. ա) $x^2 = 3$; բ) $x^2 = 2,25$;
գ) $3x^2 = 0$; դ) $x^2 = -1$:

558. ա) $-0,5x^2 = 0$; բ) $2x^2 + 3 = 0$; գ) $7x^2 - 1 = 0$;
դ) $8x^2 - 12 = 0$; ե) $3x^2 + 5 = 0$; զ) $3x^2 = 4x$;
է) $-7x^2 = 1$; ը) $72 - x^2 = 0$; թ) $16 + x^2 = 0$:

559. Առանձնացրեք լրիվ քառակուսի.
ա) $x^2 + 2x + 3$; բ) $m^2 - 2m + 3$; գ) $a^2 + 4a + 2$;
դ) $p^2 - 6p - 9$; ե) $x^2 + 2x$; զ) $c^2 - 10c$:

560. Գոյություն ունի՞ x-ի արժեք, որի դեպքում

ա) $x^2 = 0$; բ) $x^2 = 1$; գ) $x^2 + 1 = 0$;
դ) $5 + x^2 = 0$; ե) $x^2 + 7 = 0$; զ) $x^2 - 16 = 0$:

Լուծեք հավասարումը (561-566).

561. ա) $\dfrac{5-2x}{x^2-x} + \dfrac{2}{x} = \dfrac{3x}{x-1}$; բ) $\dfrac{2x}{x+1} + \dfrac{3x-1}{x^2-1} = \dfrac{3}{x-1}$;

գ) $\dfrac{6}{x^2-9} + \dfrac{2}{x^2+4x} = \dfrac{7}{x^2+x-12}$:

562. ա) $\dfrac{x+3}{x^2-x} - \dfrac{x+5}{x+x^2} = \dfrac{x-6}{1-x}$; բ) $\dfrac{5x}{3x+1} - \dfrac{1}{9x+3} = 1\dfrac{1}{6}$:

563. ա) $\dfrac{1}{2x+x^2+1} + \dfrac{4}{x+2x^2+x^3} = \dfrac{5}{2x+2x^2}$;

բ) $\dfrac{7}{6x+30} + \dfrac{3}{4x-20} = \dfrac{15}{2x^2-50}$:

564. ա) $\dfrac{2x^2-3+x^3}{x^2-x^2+1} = 0$; բ) $\dfrac{x(1-x)}{1+x} = 6$:

գ) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x-1} = \dfrac{2+x}{x^2-1}$; դ) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{5}{x-1} = \dfrac{5+x}{x^2-1}$:

565. ա) $\dfrac{2}{x^2-10x+25} - \dfrac{1}{x+5} = \dfrac{10}{x^2-25}$;

բ) $\dfrac{2}{x^2+12x+36} - \dfrac{1}{x-6} = \dfrac{12}{x^2-36}$:

566. ա) $\dfrac{1}{x-8} + \dfrac{1}{x-6} + \dfrac{1}{x+6} + \dfrac{1}{x+8} = 0$;

բ) $\dfrac{3}{x-2} - \dfrac{4}{x-1} = \dfrac{1}{x-4} - \dfrac{2}{x-3}$:

567. Համարժե՞ք են արդյոք հավասարումները.
ա) $(x-2)(x+3) = 0$ և $x^2 + 2x - 3 = 0$;
բ) $(x-3)(x-4) = 0$ և $x^2 + x - 12 = 0$;
գ) $\dfrac{1}{x+1} - x = 1$ և $(x+1)(x+2) = 0$;

դ) $(3-x)(x-1)=0$ և $x-\dfrac{2}{1-x}=4$:

Լուծեք հավասարումը (568-580).

568. ա) $x^4+9=10x^2$; բ) $x^4-20x^2+64=0$;
գ) $x^4-14x^2=15$; դ) $5x^4+3+8x^2=0$;
ե) $x^4+x^2=0$; զ) $x^4-x^2=0$;
է) $x^4+2x^2-3=0$; ը) $x^4-x^2-6=0$;
թ) $x^3+4x^2+4x+1=0$; ժ) $x^3+4=3x^2$;
ի) $2x^3-3x^2+3x=2$; լ) $x^4-2x^3+x=132$:

569*. ա) $(x^2-5)^2+(x^2-1)=40$; բ) $(x^2-10)(x^2-3)=78$;
գ) $(x^2+1)(x^2-3)=15$; դ) $(y^2-3)^2=2(15-y^2)$;
ե) $(x^2-1)^2-12=3-x^2$; զ) $(x^2-2)^2-2(x^2+5)=4$:

570. ա) $x^3-x^2+x-1=0$; բ) $x^3-x^2+x+1=0$;
գ) $2x^4+5x^3-5x-2=0$; դ) $x^3+2x^2+2x+1=0$;
ե) $3x^3-7x^2-7x+3=0$; զ) $6x^3-7x^2-7x+6=0$;
է) $x^3-25x-2x^2+50=0$; ը) $x^3+3x^2-16x-48=0$;
թ) $x^3+2x^2-9x-18=0$; ժ) $x^3-3x^2-4x+12=0$:

571. ա) $x^3-2x(x+1)=x$;
բ) $(x^3-5x^2)(x^2-3x+1)=0$;
գ) $3x^3-3x(x-1)=7x^2$;
դ) $(14x^3+19x^2+12x)(2x^2-7x+6)=0$;
ե) $(x-2)^2-10(x-2)+21=0$;
զ) $(a+1)^2=9(a+1)-20$;
է) $(2m-1)^2+4(2m-1)+3=0$;
ը) $(3n+2)^2=15-2(3n+2)$;
թ) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-4\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+5=0$;
ժ) $x^2+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-3=0$:

572. ա) $(x^2+2)\cdot|2x-1|=0$; բ) $|x^4+1|=x^4+x$:

573. ա) $x-6\sqrt{x}=-5$; բ) $x+10=7\sqrt{x}$;
գ) $x+\sqrt{x}=30$; դ) $x-3\sqrt{x}=28$;
ե) $x^9-2x^5+x=0$; զ) $x^9+4x^5+4x=0$:

574. ա) $\dfrac{2}{(2x-1)(x+2)}-\dfrac{x}{5(x+2)}=\dfrac{2}{2x-1}$;

բ) $\dfrac{4}{(3x-1)(x+1)}-\dfrac{2x}{3x+3}=\dfrac{3}{3x-1}$:

575. ա) $\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{7}{x+2}=\dfrac{8}{x^2-4}$; բ) $\dfrac{1}{x-4}+\dfrac{24}{x^2-16}=\dfrac{x+1}{x+4}$;

գ) $\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{2x}{x-1}-\dfrac{3x+1}{x^2-1}=0$; դ) $\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{x}{x+3}+\dfrac{18}{x^2-9}=0$;

ե) $\dfrac{3}{x^2-2x+1}-\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{1}{x+1}$; զ) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{1-x^2}=\dfrac{5}{x^2+2x+1}$;

է) $\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{6}{9-x^2}=\dfrac{3}{x^2-6x+9}$; ը) $\dfrac{4}{x^2+6x+9}-\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{6}{9-x^2}$:

576. ա) $\dfrac{2+a}{3-a}-\dfrac{1-3a}{a}=\dfrac{2a}{a-2}$; բ) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x-2}=\dfrac{4}{x-3}$;

գ) $\dfrac{2}{m-1}-\dfrac{1}{m+3}=\dfrac{3}{m-3}$; դ) $\dfrac{3}{x+1}+\dfrac{7}{x+2}=\dfrac{6}{x-1}$;

ե) $\dfrac{21}{y}-\dfrac{10}{y-2}-\dfrac{4}{y-3}=0$; զ) $\dfrac{3-5x}{x+2}=2+\dfrac{x-11}{x+4}$:

577. ա) $x(x+1)=\left|x+\dfrac{1}{2}\right|+\dfrac{1}{2}$; բ) $6x(x-1)+5\left|x-\dfrac{1}{2}\right|=-\dfrac{5}{2}$;

գ) $x^2+5|x+2|=-4(x+2)$; դ) $x^2+4x=2-|x+2|$:

578. ա) $4x^4-11x^2-3=0$; բ) $4x^4-7x^2-2=0$:

579. ա) $x-\dfrac{4x}{4-x}=\dfrac{16}{x-4}$; բ) $\dfrac{3x}{3-x}+\dfrac{9}{x-3}=x$;

գ) $\dfrac{1}{x^2-10x+25}+\dfrac{10}{25-x^2}=\dfrac{1}{x+5}$;

դ) $\dfrac{2}{x^2+12x+36}+\dfrac{12}{36-x^2}=\dfrac{1}{x-6}$:

580. ա) $\dfrac{1}{x-x^{-1}}=1$; բ) $\dfrac{1}{x+x^{-1}}=1$;

գ) $\dfrac{2}{x^2+10x+25}-\dfrac{10}{25-x^2}=\dfrac{1}{x-5}$;

դ) $\dfrac{1}{x^2-12x+36}-\dfrac{12}{36-x^2}=\dfrac{1}{x+6}$;

x-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում է որոշված արտահայտությունը (581-583).

581. ա) $\dfrac{1}{x+1}$; բ) $\dfrac{1}{x-1}$; գ) $\dfrac{2x}{3x-1}$; դ) $\dfrac{4x}{2x+5}$:

582. ա) $\dfrac{2x^2-4}{x^2-x}$; բ) $\dfrac{7-2x^2}{2x-x^2}$; գ) $\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x-2}$:

դ) $\dfrac{1}{x^2-5x+6}$; ե) $\dfrac{x^2-7}{x^2-3x+4}$; զ) $\dfrac{5}{x^2-x+3}$:

583. ա) $\dfrac{x-7}{x^2-5x+6}$; բ) $\dfrac{5}{x^2+x+3}$; գ) $\dfrac{x^2-5}{x+5}$;

դ) $\dfrac{3x-x^2}{x^2-5x+6}$; ե) $\dfrac{x^2-7x-1}{2x-7x^2-8}$; զ) $\dfrac{9x^2-4x-1}{5x-3x^2+1}$:

584. Տրված թիվը $x^2-4x+2=0$ հավասարման արմա՞տ է.

ա) $-2-\sqrt{2}$; բ) $2+\sqrt{2}$;
գ) $2-\sqrt{2}$; դ) $-2+\sqrt{2}$:

585. Ճի՞շտ է արդյոք, որ x-ի ցանկացած թվային արժեքի համար

$$x^2+6x+10>0:$$

586.* m-ի ի՞նչ թվային արժեքների համար է

$$(2-m)x^2+2mx+1$$

արտահայտությունը լրիվ քառակուսի:

587. Ռացիոնալ գործակիցներով քառակուսային հավասարումը կարո՞ղ է ունենալ այսպիսի արմատներ.

ա) 5 և $2+\sqrt{3}$; բ) $\sqrt{2}$ և $\sqrt{5}$; գ) $3-\sqrt{2}$ և $3+\sqrt{2}$:

588.* t-ի ի՞նչ թվային արժեքի դեպքում է $x^2-12x+t=0$ հավասարման արմատներից մեկը մյուսի քառակուսին:

589. t-ի ի՞նչ թվային արժեքի դեպքում

$$x^2 + t(t-1)\,x + 9 = 0$$

հավասարումն ունի հավասար արմատներ:

590. Գրեք մի քառակուսային եռանդամ, որի արժեքը $x = 0$ դեպքում 3 է, $x = 1$ դեպքում` 0, $x = 2$ դեպքում` 1:

591. Գրեք քառակուսի եռանդամ, որի արժեքը $x = 1$ դեպքում 1 է, $x = 2$ դեպքում` 3, $x = 3$ դեպքում` 11:

592. Կարո՞ղ են $x^2 + px + q = 0$ բերված տեսքի քառակուսային հավասարման արմատները լինել ամբողջ թվեր, եթե p-ն և q-ն

ա) ամբողջ թվեր են,   բ) ռացիոնալ թվեր են:

593. Լուծեք հավասարումը.

ա) $1999x^2 - 2001x + 2 = 0$;   բ) $(x-3)(x-4)(x-7)(x-8) = 12$:

Ֆունկցիա, գրաֆիկ, համեմատականություն

594. Գտեք նշված մեծությունների հարաբերությունը.

ա) 1 կմ և 1 մ,   բ) 1 գ և 1 կգ,

գ) 1 ժ և 1 րոպե,   դ) 1 կմ^2 և 1 հա:

595. Գրեք համեմատականության տեսքով.

ա) 3-ը հարաբերում է 5-ին, ինչպես 9-ը` 15-ին:

բ) 7,2-ը հարաբերում է 3-ին, ինչպես 1,2-ը` 0,5-ին:

գ) 12-ը այնքան անգամ մեծ է 4-ից, որքան անգամ 48-ը` 16-ից:

դ) 8-ը այնքան անգամ մեծ է 7-ից, որքան անգամ 4-ը` 3,5-ից:

596°. Կարելի՞ է արդյոք կազմել համեմատականություն հետևյալ հարաբերություններից.

ա) 20 : 10 և 10 : 5;   բ) 1 : 3 և 15 : 5;

գ) 11 : 2 և 1,1 : 0,2;   դ) $\frac{1}{2}$: 3 և 2 : 12:

597. Ճի՞շտ է արդյոք հավասարությունը.

ա) $\frac{9}{5} = \frac{18}{10}$;   բ) 4 : 13 = 2 : 6,5;

գ) $7 : 3 = \frac{21}{9}$;　　　　դ) $\frac{0,02}{17} = \frac{4}{340}$:

598°. Կարելի՞ է կազմել համեմատականություն հետևյալ թվերից.

ա) 1, 2, 3, 6;　　բ) 7, 6, 2, 21;　　գ) 2, 18, 6, 6;　　դ) 3, 40, 20, 6:

599. Տվյալ թվերի եռյակի համար ընտրեք չորրորդ թիվն այնպես, որ այդ թվերը կազմեն համեմատականություն.

ա) 2, 3, 5;　　բ) 7, 2, 8;　　գ) 10, 1000, 1;　　դ) 7, 5, 3:

600. Կոտորակային թվերի հարաբերությունը փոխարինեք դրան հավասար ամբողջ թվերի հարաբերությամբ.

ա) $\frac{0,2}{0,5}$;　　բ) $\frac{1,7}{0,5}$;　　գ) $\frac{1,21}{0,05}$;　　դ) $\frac{0,0001}{0,5}$;

ե) $\frac{1}{3} : \frac{1}{4}$;　　զ) $\frac{2}{5} : 0,5$;　　է) $\frac{2}{3} : \frac{4}{7}$;　　ը) $1,2 : \frac{4}{5}$:

601. Ճի՞շտ կմնա արդյոք համեմատականությունը, եթե բազմապատկենք զրոյից տարբեր միևնույն թվով

ա) երկու եզրային անդամները,
բ) երկու միջին անդամները:

602. Արտադրյալների հավասարությունը փոխարինեք համեմատականությամբ.

ա) $16 \cdot 3 = 2 \cdot 24$;　　բ) $3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$;
գ) $250 \cdot 8 = 2 \cdot 1000$;　　դ) $144 \cdot 3 = 16 \cdot 27$:

603. Որոշեք մասշտաբը, եթե գծագրի 1 սմ-ին համապատասխանում է տեղանքի 10 մ:

604. Աշխարհագրական քարտեզի վրա որոշեք երկու քաղաքների միջև խճուղով ճանապարհը պատկերող հատվածի երկարությունը, եթե տեղանքում այդ խճուղու երկարությունը 200 կմ է, իսկ քարտեզի մասշտաբը՝

ա) 1 : 1 000 000;　　բ) 1 : 5 000 000;
գ) 1 : 200 000;　　դ) 1 : 20 000 000:

605. Քարտեզի մասշտաբը 1 : 50000 է: Որոշեք տեղանքում հեռավորությունը, եթե քարտեզում այն պատկերված է

ա) 5 սմ, բ) 2,2 սմ, գ) 37 մմ, դ) 1,2 դմ

երկարությամբ հատվածով:

606. 400 մ, 350 մ, 275 մ երկարությամբ փողոցի երկարությունը պատկերեք հորիզոնական հատվածներով՝ 50 մ-ը ընդունելով 1 սմ: Ի՞նչ մասշտաբով է կատարված գծագիրը:

607. Շենքի 40 մ, 60 մ, 35 մ բարձրությունները պատկերեք ուղղաձիգ հատվածներով՝ ընդունելով 2 սմ-ը 10 մ: Ի՞նչ մասշտաբով է կատարված գծագիրը:

608. 1 : 250 մասշտաբով պլանում շենքի երկարությունը 6 սմ է: Գտեք շենքի իրական երկարությունը:

609. Շենքի պլանը նախագծված է 8 մ 1 սմ մասշտաբով: Ինչպիսի՞ն է բնակարանի իրական չափերը, եթե պլանում դրանք հավասար են 1,25 և 1,5 սմ:

610. Դպրոցի շենքի երկարությունը 60 մ է: Գտեք այդ շենքի երկարությունը հատակագծում, եթե 1 սմ-ին համապատասխանում է 5 մ:

611. Մոսկվա-Սանկտ Պետերբուրգ մայրուղու երկարությունը 725 կմ է: Գտեք այդ ճանապարհի երկարությունը 1 : 5 000 000 մասշտաբով քարտեզում:

612°. Ճի՞շտ է արդյոք պնդումը.

ա) y և x փոփոխականների միջև ցանկացած ուղիղ համեմատական կախում y-ի x-ի, նկատմամբ գծային ֆունկցիա է:

բ) Ցանկացած գծային ֆունկցիա ուղիղ համեմատական կախում է:

613°. Անոթում սնդիկ է լցված: Սնդիկի ճնշումն անոթի հատակի վրա հաշվվում է $P = kH$ բանաձևով, որտեղ H-ը սնդիկի սյան բարձրությունն է: Տվյալ դեպքում ի՞նչ իմաստ ունի համեմատականության k գործակիցը:

614. Ապրանքի գինն ուղիղ համեմատական է քանակին: Կազմեք այդ կապն արտահայտող բանաձև և պարզեք համեմատականության գործակցի իմաստը:

615. Մետաղալարի l երկարության և t ջերմաստիճանի կապն արտահայտվում է $l = l_0(1 + \alpha t)$ բանաձևով, որտեղ l_0-ն մետաղալարի երկարությունն է 0 °C-ում, իսկ α-ն հաստատուն թիվ է: t-ն արտահայտեք l-ով:

616. ա) 1 հա բերքը A ց/հա է, մակերեսը՝ S (հա), բերքի զանգվածը՝ P (ց): Արտահայտեք A, S և P-ի կապը:
բ) Անիվի շրջանագծի երկարությունը C է, պտույտների թիվը՝ k, անցած ճանապարհը՝ S: Բանաձևով արտահայտեք C, k, S-ի կապը:

617. ա) V ծավալով ջրավազանը լցվում է պոմպով t ժամանակում: Պոմպի արտադրողականությունը K է: Բանաձևով արտահայտեք V, t և K-ի կապը:
բ) Ջրավազանի ծավալն ընդունելով միավոր՝ բանաձևով արտահայտեք պոմպի K արտադրողականությունը t ժամանակով:

618. ա) Ավանդատուն խնայբանկ ներդրեց A ռ. գումար, տարեկան K %-ով: Բանաձևով արտահայտեք B ներդրումը 1 տարի հետո:
բ) Բանաձևով արտահայտեք m զանգվածի, V ծավալի և P խտության կապը: Յուրաքանչյուր փոփոխականի համար գրեք համապատասխան բանաձևը:

619. ա) 20-ը 6-ի բաժանելիս քանորդում ստացվում է 3, իսկ մնացորդում՝ 2: Գրեք համապատասխան հավասարությունը: Այդ հավասարությունից յուրաքանչյուր թիվ արտահայտեք մյուս երկուսով:
բ) Բանաձևով արտահայտեք a բաժանելիի, b բաժանորդի, c քանորդի և d մնացորդի կապը: Այդ բանաձևից յուրաքանչյուր թիվ արտահայտեք մյուս երկուսով:

620. ա) Հայտնի է, որ $x = 2$ դեպքում $y = 3x + b$ ֆունկցիան ընդունում է 8 արժեք: Գտեք b-ն:
բ) Հայտնի է, որ $y = kx - 2$ ֆունկցիայի գրաֆիկն անցնում է $(-3; 7)$ կետով: Գտեք k-ն:

621. Տրված են երկու ֆունկցիաներ՝ $y = 3x - 1$ և $y = 0{,}2x + 2$:
Պարզեք x-ի ի՞նչ արժեքի դեպքում են երկու ֆունկցիաներն ընդունում նույն արժեքը: Լուծումը լուսաբանեք գրաֆիկի օգնությամբ:

622.* ա) Ցույց տվեք, որ $(0; a)$ և $(-1; 0)$ կետերով անցնող ուղղի ցանկացած կետի կոորդինատները բավարարում են $y = ax + a$ հավասարմանը:

բ) Տրված է $y = Ax + B$ ֆունկցիան, որտեղ A-ն և B-ն տրված թվերն են ($A \neq 0$): Ապացուցեք, որ հարթության բոլոր այն կետերը, որոնց կոորդինատները բավարարում են այդ հավասարմանը, պատկանում են (O; B) և $\left(-\dfrac{B}{A}; O\right)$ կետերով տարված ուղղին:
գ) Գրեք $(x_1; y_1)$ և $(x_2; y_2)$ $(x_1 \neq x_2)$ կետերով անցնող ուղղի հավասարումը:
դ) Գրեք օրդինատների առանցքին չպատկանող $(x_1; y_1)$ և $(0; b)$ կետերով անցնող ուղղի հավասարումը:
ե) Գրեք k անկյունային գործակցով և $(x_1; y_1)$ կետով անցնող ուղղի հավասարումը:
զ) Քառակուսու անկյունագծերը գտնվում են կոորդինատային առանցքների վրա և հավասար են 8-ի: Գրեք քառակուսու կողմերը պարունակող ուղիղների հավասարումները:

623. x-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում $y = x + 2$ ֆունկցիայի արժեքները
ա) դրական են,
բ) բացասական են,
գ) փոքր են 5-ից,
դ) մեծ են 3-ից,
ե) 4-ից փոքր չեն,
զ) 1-ից մեծ են, 3-ից փոքր,
է) −3-ից մեծ են, 1-ից փոքր,
ը) 0-ից մեծ են, բայց 7-ից փոքր:

624. Ի՞նչ անկյուն են կազմում $y = x$ և $y = -x$ ֆունկցիաների գրաֆիկները Ox դրական կիսառանցքի հետ: Ի՞նչ անկյուն են կազմում այդ գրաֆիկները միմյանց հետ:

625.* ա) Բերեք գծային ֆունկցիաների օրինակներ, որոնց գրաֆիկները զուգահեռ են: Ինչո՞վ են տարբերվում այդ ֆունկցիաների բանաձևերը:
բ) Բերեք գծային ֆունկցիաների օրինակներ, որոնց գրաֆիկները Ox դրական կիսառանցքի հետ կազմում են 45°, 135° անկյուններ:
գ) Բերեք գծային ֆունկցիաների օրինակներ, որոնց գրաֆիկները փոխուղղահայաց են:

626. ա) Ուղիղ համեմատականության գրաֆիկը դասավորված է I և III քառորդներում: Գտեք այդ ուղիղ համեմատականության գործակցի նշանը:
բ) Ո՞ր քառորդներում է դասավորված ուղիղ համեմատականության գրաֆիկը, եթե $k > 0$, $k < 0$:
գ) Ինչպե՞ս է դասավորված $y = kx$ ֆունկցիայի գրաֆիկը $k = 0$ դեպքում:

627. ա) Ի՞նչ կարելի է պնդել k և b թվերի մասին, եթե $y = kx + b$ գծային ֆունկցիայի գրաֆիկը դասավորված է
ա) I քառորդում, բ) II քառորդում, գ) III քառորդում:
բ) Եթե $y = kx + b$ բանաձևում $b < 0$, ապա ո՞ր քառորդներում կարող է դասավորված լինել այդ գծային ֆունկցիայի գրաֆիկը: Ինչպիսի՞ դեպքեր են հնարավոր:
Բերեք օրինակներ:

628. Ի՞նչպես կարող է դասավորված լինել $y = kx + b$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, եթե.
ա) $b > 0$ և $|k| < 1$, բ) $b < 0$ և $|k| > 1$:
Բերեք օրինակներ:

629. Նյութական կետը Os առանցքով շարժվում է
ա) $s = 2t + 3$, բ) $s = -2t + 3$ օրենքներով:
1) Կետի շարժումը հավասարաչա՞փ է:
2) Առանցքի ո՞ր ուղղությամբ է այն շարժվում:
3) Ի՞նչ արագությամբ է շարժվում կետը:
4) $t = 0$ ժամանակի պահին որտե՞ղ է գտնվում կետը:
5) Ժամանակի ո՞ր պահին էր կետը գտնվում զրոյական կետում ($s = 0$):
6) tOs կոորդինատային համակարգում կառուցեք նյութական կետի շարժման գրաֆիկը:

630. Թափ առնելով՝ հեծանվորդը գնում է սարն ի վեր $v = 10 - 2t$ մ/վրկ արագությամբ՝ առանց ոտնակներն օգտագործելու: Որքա՞ն ժամանակ նա կգնա մինչև կանգ առնելը: Պատասխանը լուսաբանեք գրաֆիկորեն:

631. Կառուցեք ֆունկցիայի գրաֆիկը.
ա) $y = 3$; բ) $y = -x$; գ) $y = 0{,}5x + 5$; դ) $y = -4 - x$:

Կառուցեք ֆունկցիայի գրաֆիկը (632-633).

632. ա) $y = \frac{1}{3}x$; բ) $y = \frac{3}{4}x$; գ) $y = -2\frac{1}{3}x$;
դ) $y = 2{,}5x$; ե) $y = 0$; զ) $y = -x$:

633. ա) $y = 2x - 3$; բ) $y = -2x - 3$; գ) $y = 3x + 1$;
դ) $y = -\frac{1}{2}x - 3$; ե) $y = \frac{1}{2}x - 3$; զ) $y = \frac{1}{3}x + 1$:

634. Նշված կետը պատկանո՞ւմ է $y = 3{,}5x + 12$ ֆունկցիայի գրաֆիկին.
ա) (–1; –2); բ) (5; –7); գ) (–2; –5,8); դ) (4; 15,2):

635. A կետը պատկանում է $y = -2x + 0{,}5$ ֆունկցիայի գրաֆիկին: Գտեք անհայտ կոորդինատը.
ա) A(x; 1,5); բ) A(4; y); գ) A(x; –2); դ) A(–3; y):

636. Կառուցեք ֆունկցիայի գրաֆիկը և գտեք x առանցքի հետ գրաֆիկի հատման կետի կոորդինատները.
ա) $y = 3x + 2$; բ) $y = 3x - 2$; գ) $y = x + 3$;
դ) $y = -x + 2$; ե) $y = 0{,}5x - 4$; զ) $y = 5 - 3x$:

637. Օգտվելով $y = x$ ֆունկցիայի գրաֆիկից՝ կառուցեք ֆունկցիաների գրաֆիկները.
ա) $y = 3x$; բ) $y = 0{,}3x$; գ) $y = -2x$:

638. Կառուցեք ֆունկցիայի գրաֆիկը.
ա) $y = x$; բ) $y = |x|$; գ) $y = -|x|$; դ) $y = 0$:

639. Նշեք ֆունկցիայի աճման (նվազման) միջակայքերը.
ա) $y = x - 2$; բ) $y = -2x + 3$;
գ) $y = 2(x + 1)$; դ) $y = 3x - 7(x - 4)$;
ե) $y = |x|$; զ) $y = -|x|$:

640. Գրեք կոորդինատների սկզբնակետով և տրված կետով անցնող ուղղի հավասարումը.
ա) B(1; 1,5); բ) B(1; –3); գ) B(1; –0,5);

641. Գրեք (0; 3) կետով անցնող և տրված ուղղին զուգահեռ ուղղի հավասարումը.
ա) $y = 2x$; բ) $y = 2x - 1$;
գ) $y = 1{,}5x - 1$; դ) $y = -x + 2$:

642. Ո՞ր գծային ֆունկցիայի գրաֆիկն է անցնում տրված կետերով.

ա) A(2; 6) և B(6; 10); բ) A(2; 5) և B(3; 7);

գ) A(3; 3) և B(5; 1); դ) A(–1; 2) և B(2; –7):

643. Գրեք տրված կետերով անցնող ուղղի հավասարումը.

ա) (2; 1) և (1; 0); բ) (1; 2) և (3; 4);

գ) (0; 2) և (1; 0); դ) (–1; 2) և (2; –1);

ե) (0; 0) և (–3; –3); զ) (1; –2) և (–3; –5):

644. Ապացուցեք, որ

ա) $y = 2x$ ֆունկցիան աճող է,

բ) $y = -\frac{1}{2}x$ ֆունկցիան նվազող է,

գ) $y = 3x^2$ ֆունկցիան աճող է $x \geqslant 0$ դեպքում,

դ) $y = -x^2$ ֆունկցիան նվազող է $x \geqslant 0$ դեպքում:

645. ա) $y = x^2$ ֆունկցիայի արժեքները դասավորեք աճման կարգով.

$$y(-4),\ y(5{,}1),\ y(4{,}1),\ y(0{,}5),\ y(0):$$

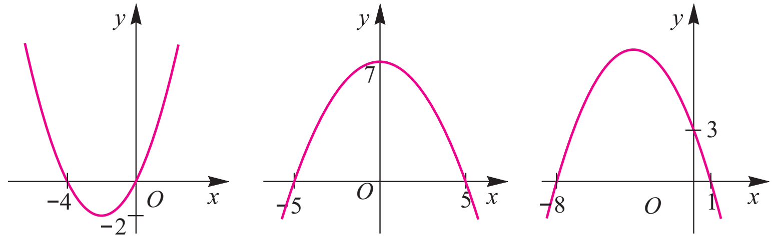
բ) Դասավորեք $y = x^2$ ֆունկցիայի արժեքները նվազման կարգով.

$$y\left(-\frac{1}{5}\right),\ y(-0{,}3),\ y\left(\frac{1}{4}\right),\ y(0{,}27),\ y(-0{,}(3)),\ y\left(\frac{2}{7}\right):$$

646.* $y = 3 \cdot \frac{x^2}{x} + 5$ ֆունկցիան գծայի՞ն է:

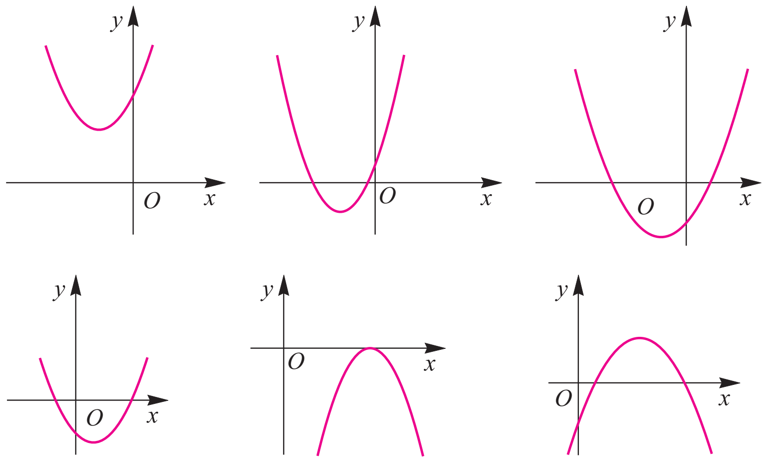
647.* Կառուցեք $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

648. Նկ. 86-ում պատկերված է $y = ax^2 + bx + c$ քառակուսային ֆունկցիայի գրաֆիկը: Գտեք a, b և c-ն:



Նկ. 86

649. $y = ax^2 + bx + c$ ֆունկցիայի գրաֆիկով որոշեք a, b և c-ն (նկ. 87):



Նկ. 87

650. Երկու նյութական կետեր Os առանցքով շարժվում են՝
ա) $s = 2t + 4$ և $s = 4t$;   բ) $s = 2t + 1$ և $s = -t + 3$;
գ) $s = 2t + 1$ և $s = 2t + 3$
օրենքներով: Կհանդիպե՞ն արդյոք այդ կետերը: Եթե այո, ապա ժամանակի ո՞ր պահին: Նկարեք շարժումների գրաֆիկները և դրանց օգնությամբ պարզաբանեք ստացված արդյունքները:

651.* Գրաֆիկի օգնությամբ գտեք x-ի այն արժեքները, որոնց համար տեղի է ունենում անհավասարումը.

ա) $x^2 > 9$;   բ) $x^2 > -5$;   գ) $x^2 \geqslant 3$;
դ) $x^2 < -3$;   ե) $x^2 \leqslant 0$;   զ) $x^2 < 4$;
է) $x^2 > 2x$;   ը) $x^2 < x$;   թ) $x^2 \leqslant 2x + 1$:

652.* Կառուցեք ֆունկցիայի գրաֆիկը.

ա) $y = |x|(x + 2)$;   բ) $y = x|x + 2|$:

653.* Գրաֆիկի օգնությամբ գտեք k-ի այն արժեքները, որոնց համար տեղի է ունենում հավասարությունը.

ա) $\dfrac{1}{x} = 1$;   բ) $3 = \dfrac{1}{x}$;   գ) $\dfrac{1}{x} = x^2$:

Կառուցեք ֆունկցիայի գրաֆիկը (654-656).

654.* ա) $y = \frac{1}{x}$; բ) $y = -\frac{1}{x}$; գ) $y = \frac{|x|}{x^2}$; դ) $y = \frac{x^2}{|x^2|}$:

655.* ա) $y = \frac{1}{x} + 1$; բ) $y = \frac{1}{x} - 2$;
գ) $y = 2 - \frac{1}{x}$; դ) $y = \frac{x-1}{x}$:

656. ա) $y = -|x|$; բ) $y = |x - 1|$; գ) $y = |2x + 1|$;
դ) $y = x + |x|$; ե) $y = |x - 1|$; զ) $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$;
է) $y = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$:

657. Գտեք տրված կետերի հեռավորությունը.
ա) A(1; 2) և B(1; –8); բ) A(1; 2) և B(–6; 2);
գ) A(1; 2) և B(2; 5); դ) A(1; 2) և B(–2; –5):

658. Գրեք A կենտրոնով և AB շառավղով շրջանագծի հավասարումը.
ա) A(–2; 1) և B(1; 5); բ) A(1; 5) և B(–2; 1):

659.* 20-ը ներկայացրեք երկու գումարելիների տեսքով այնպես, որ արտադրյալը լինի մեծագույնը:

660.* Գտեք այն թիվը, որի գումարն իր քառակուսու հետ փոքրագույնն է:

661.* 18-ը ներկայացրեք երկու գումարելիների տեսքով այնպես, որ առաջին գումարելու կրկնապատիկի և երկրորդի քառակուսու գումարները լինեն փոքրագույնը:

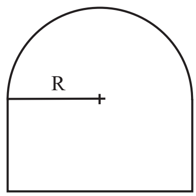
662.* 16-ը ներկայացրեք երկու գումարելիների տեսքով այնպես, որ նրանց խորանարդների գումարը լինի փոքրագույնը:

663.* 100 սմ երկարությամբ մետաղալարը ծալված է այնպես, որ ստացվել է մեծագույն մակերեսով ուղղանկյուն: Գտնել ուղղանկյան չափերը:

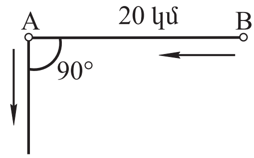
664.* 12 դմ երկարությամբ մետաղալարը ծալված է ուղիղ անկյան տեսքով այնպես, որ երևակայվող ներքնաձիգի վրա կառուցված քառակուսու մակերեսը փոքրագույնն է: Գտեք ստացված ուղիղ անկյան կողմերը:

665.* 20 սմ հիմքով և 14 սմ բարձրությամբ հավասարասրուն եռանկյանը ներգծված է մեծագույն մակերեսով ուղղանկյուն: Գտեք այդ ուղղանկյան մակերեսը:

666.* Թունելի հատույթն ունի վերևից կիսաշրջանով սահմանափակված ուղղանկյան տեսք (նկ. 88): Հատույթի պարագիծը 18 մ է: Կիսաշրջանի շառավղի ի՞նչ արժեքի դեպքում է թունելի հատույթի մակերեսը մեծագույնը:



Նկ. 88



Նկ. 89

667.* A և B վայրերից (նկ. 89), որոնց հեռավորությունը 20 կմ է, ճշված ուղղանկյուններով միաժամանակ շարժվեցին երկու հետիոտն: A-ից դուրս եկած հետիոտնի արագությունը 4 կմ/ժ է, իսկ B-ից մեկնածի արագությունը՝ 6 կմ/ժ: Որքա՞ն ժամանակ հետո նրանց հեռավորությունը կլինի փոքրագույնը:

668. Ի՞նչ պայմանների պետք է բավարարեն a, b և c թվերը, որ $y = ax^2 + bx + c$ քառակուսային եռանդամը
ա) ընդունի դրական արժեքներ x-ի ցանկացած արժեքի դեպքում,
բ) ընդունի մեծագույն արժեք:

669. Ի՞նչ պայմանի դեպքում է $y = ax^2 + bx + c$ քառակուսային ֆունկցիայի գրաֆիկը Ox առանցքը հատում երկու կետում, որոնց աբսցիսները հակադիր թվեր են:

670. $y = ax^2 + bx + c$ քառակուսային ֆունկցիայի բանաձևում որոշեք a թվի նշանը, եթե $x_2 > x_1 > -\dfrac{b}{2a}$ պայմանից հետևում է, որ $y_2 > y_1$, որտեղ y_1 և y_2-ը ֆունկցիայի արժեքներն են x_1 և x_2 կետերում:

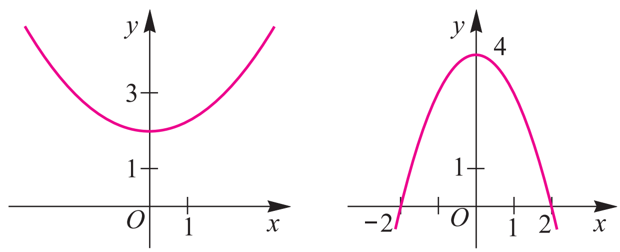
671. Գրեք $\left(\dfrac{1}{3}; 0\right)$ և $(4; 0)$ երկու կետերով անցնող որևէ պարաբոլի հավասարում:

672. Ի՞նչ պայմանների պետք է բավարարեն a, b և c թվերը, որ $y = ax^2 + c$ պարաբոլը և $y = -bx$ ուղիղը ունենան երկու ընդհանուր կետ:

673. Գրեք կոորդինատների սկզբնակետով անցնող որևէ $y = ax^2 + bx + c$ պարաբոլի հավասարում, եթե հայտնի է, որ -2-ը $ax^2 + bx + c$ քառակուսային եռանդամի արմատն է (a, b և c-ն ամբողջ թվեր են):

674. Ինչպե՞ս է դասավորված xOy կոորդինատային համակարգում $y = |ax^2 + bx| + c$ ֆունկցիայի գրաֆիկը, եթե $b^2 - 4ac > 0$, $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$: Ուրվագծեք այդ ֆունկցիայի գրաֆիկը:

675. Նկ. 90-ում պատկերված է $y = ax^2 + bx + c$ ֆունկցիայի գրաֆիկը: Ի՞նչ արժեքներ կարող են ընդունել a, b և c թվերը:

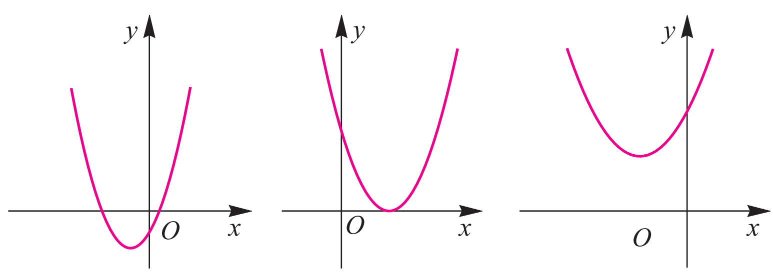


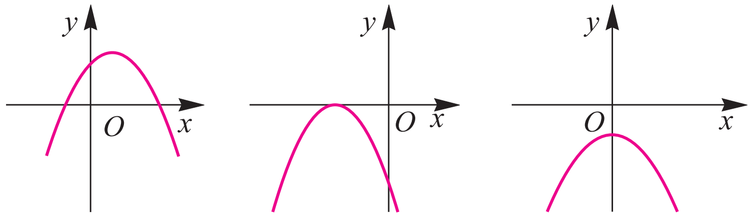
Նկ. 90

676. Նկ. 91-ում պատկերված են քառակուսային ֆունկցիաների գրաֆիկներ: Ցույց տվեք նշված պայմաններին բավարարող նկարը.

ա) $D > 0$, $a < 0$; բ) $D > 0$, $a > 0$; գ) $D = 0$, $a < 0$;
դ) $D < 0$, $a > 0$; ե) $D < 0$, $a < 0$; զ) $D = 0$, $a > 0$:

D-ն տարբերիչն է, a-ն՝ $ax^2 + bx + c$ քառակուսային եռանդամի ավագ անդամի գործակիցը:





Նկ. 91

677. Գտեք 2-ից 12 սմ երկարության տրամագծերով 6 տարբեր շրջանների շրջանագծերի երկարությունները: Չափումները կարելի է կատարել ռուլետկայով կամ թելով, որի երկարությունը կարելի է չափել քանոնով (Կարելի է օգտագործել մետաղադրամներ, ափսեներ, պահածոյի տուփեր, բաժակներ և այլն): Ստացված արդյունքները մտցրեք աղյուսակ: Կառուցեք շրջանագծի երկարության տրամագծից կախվածության գրաֆիկը: Ինչպե՞ս են դասավորված գրաֆիկի կետերը: Ինչի՞ է հավասար շրջանագծի երկարության և տրամագծի հարաբերությունը: Կարելի՞ է արդյոք արդյունքները համարել ճշգրիտ:

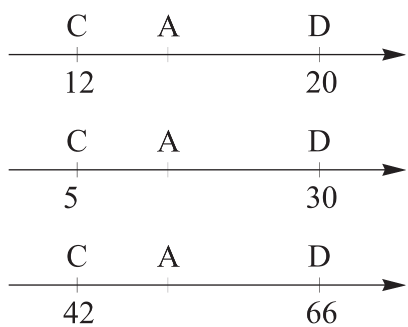
678. Կոորդինատային ուղղի վրա նշեք այն թվերը, որոնց համար ճիշտ է անհավասարությունը.

ա) $x > 5$; բ) $x \leqslant -1$; գ) $x \geqslant 0$;
դ) $|x| = 2$; ե) $|x| < 2$; զ) $|x| \geqslant 2$;

679. Թվային ուղղի վրա առանձնացրեք այն կետերը, որոնք բավարարում են
ա) $|x| = 3$, բ) $|x| < 3$, գ) $|x| > 3$
պայմաններին:

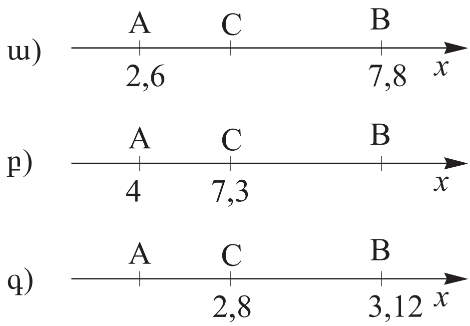
680. Գտեք A կետի կոորդինատը, եթե A-ն CD հատվածի միջնակետն է (նկ. 17):

681. C-ն AB հատվածի վերջնակետն է (նկ. 18): Գտեք
ա) C կետի կոորդինատը ա) նկարից,
բ) B կետի կոորդինատը բ) նկարից,
գ) A կետի կոորդինատը գ) նկարից:

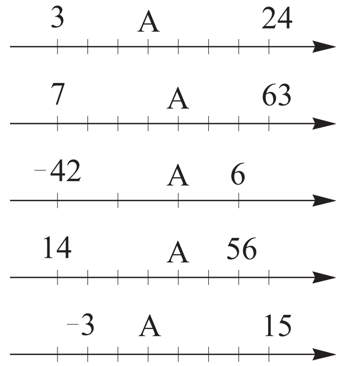


Նկ. 17

682. Գտեք A կետի կոորդինատը (նկ.19)



Նկ.18



Նկ.19

683. xOy կոորդինատային համակարգում.
ա) նշեք 2 աբսցիս ունեցող երեք կետ, որոշեք դրանց օրդինատները և գրեք այդ կետերի կոորդինատները,
բ) նշեք –3 օրդինատով երեք կետ, որոշեք դրանց աբսցիսները և գրեք այդ կետերի կոորդինատները,
գ) նշեք Ox աբսցիսով 3 կետ, որոշեք դրանց օրդինատները և գրեք այդ կետերի կոորդինատները,
դ) նշեք Oy օրդինատով 3 կետ, որոշեք դրանց աբսցիսները և գրեք այդ կետերի կոորդինատները,

684. Կոորդինատային հարթության վրա նշեք բոլոր այն կետերը, որոնց
ա) աբսցիսները մեծ են 1-ից,
բ) օրդինատները փոքր են –3-ից,
գ) աբսցիսները բավարարում են $x > -2$ պայմանին,
դ) օրդինատները բավարարում են $y > 3$ պայմանին,
ե) աբսցիսները բավարարում են $-1 < x < 3$ պայմանին,
զ) օրդինատները բավարարում են $-5 < y < 1$ պայմանին:

685. Կոորդինատային հարթության վրա նշեք բոլոր այն (x; y) կետերը, որոնց կոորդինատները բավարարում են հետևյալ պայմաններին.
ա) $x = 3$, $y > 2$; բ) $x < -2$, $y = -4$;
գ) $0 < x < 5$, $y > 4$; դ) $x < 0$, $-2 < y < 4$;
ե) $-1 < x < 3$, $0 < y < 5$; զ) $-3 < x < 1$, $-2 < y < 1$:

686. Կոորդինատային հարթության վրա նշեք բոլոր այն կետերը, որոնց
ա) աբսցիսները մեծ են 1-ից, բ) օրդինատները փոքր են –3-ից,

գ) աբսցիսները բավարարում են $x < -1$ անհավասարմանը,
դ) օրդինատները բավարարում են $y \geqslant 2$ անհավասարմանը,
ե) աբսցիսները բավարարում են $-1 < x < 4$ անհավասարմանը,
զ) օրդինատները բավարարում են $-4 \leqslant y \leqslant 2$ անհավասարմանը:

687. Կոորդինատային հարթության վրա նշեք բոլոր այն $(x; y)$ կետերը, որոնց կոորդինատները բավարարում են

ա) $x = 2, y > 3$;
բ) $x > -1, y = -2$;
գ) $0 \leqslant x < 2, y < 3$;
դ) $x \geqslant 0, -1 < y < 3$;
ե) $-2 < x < 4, 0 < y \leqslant 2$;
զ) $-3 < x \leqslant 2, -3 \leqslant y < 2$:

պայմաններին:

688. Կոորդինատային հարթության վրա պատկերեք այն կետերի բազմությունը, որոնց կոորդինատները բավարարում են նշված պայմաններին.

ա) $x = 1, 2 < y \leqslant 3$;
բ) $1 < x < 4, y = 5$;
գ) $|x| > 2, y < 5$;
դ) $|x| < 3, |y| < 2$:

689. Գտեք $y = 2, 1 \leqslant x \leqslant 2$ պայմաններով տրված հատվածի համաչափ հատվածը Ox առանցքի նկատմամբ:

690. Կոորդինատային ուղղի վրա պատկերեք նշված պայմանին բավարարող կետերի բազմությունը.

ա) $|x| \leqslant 2$;
բ) $|x| > 1$;
գ) $|x| < 0{,}5$:

691. Կառուցեք $y = 0{,}5x - 1{,}5$ ֆունկցիայի գրաֆիկը:
ա) x-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում է ֆունկցիան ընդունում դրական արժեքներ:
բ) x-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում է ֆունկցիան ընդունում բացասական արժեքներ:
գ) Ի՞նչ արժեքներ է ընդունում y-ը, եթե

1) $x > 6$;
2) $x < 0$;
3) $-5 < x < 0$;
4) $5 < x < 7$:

692. Կառուցեք $y = x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը: Ի՞նչ արժեքներ է ընդունում y-ը, եթե

ա) $x > 2$;
բ) $x < -1$;
գ) $1 < x < 4$;
դ) $-2 < x < 5$:

693. Կառուցեք $y = -2x$ ֆունկցիայի գրաֆիկը: Ի՞նչ արժեքներ է ընդունում y-ը, եթե

ա) $x > 3$; բ) $x < 1$;
գ) $4 < x < 7$; դ) $-5 < x < -1$:

694. Ո՞ր գծային ֆունկցիաների գրաֆիկներն են Ox դրական կիսառանցքի հետ կազմում 45°-ից փոքր անկյուններ: Բերեք օրինակներ:

695. Արդյոք տրված ֆունկցիաների գրաֆիկները Oy դրական կիսառանցքի հետ կազմում են 45°-ից փոքր անկյուններ.

ա) $y = \frac{1}{3}x$; բ) $y = -3x$;
գ) $y = 7{,}2x$; դ) $-5 < y = -\frac{4}{9}x$:

696. Կառուցեք այն կետերը, որոնց կոորդինատները բավարարում են նշված պայմանին.

ա) $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$; բ) $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$:

Որտե՞ղ են դասավորված այդ կետերը:

697. Նշված հավասարումից x-ը արտահայտեք y-ով.
ա) $xy = 5$; բ) $x + xy = 1$;
գ) $x^2 + 3y = 2$; դ) $y^2 - xy = 0$:

Լուծեք հավասարումների համակարգը (698-700).

698. ա) $\begin{cases} 4x + 3y = 6, \\ 2x + 8y = 1; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 7x - 3y = 15, \\ 5x + 6y = 27; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} 2x - 3y = 8, \\ 5y - 7x = 5; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} 6x - 7y = 40, \\ 5y - 6y = 0: \end{cases}$

699. ա) $\begin{cases} 2y + 6x + 6 = 0, \\ 5x + y = 17; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 7x - 3y = 27, \\ 5x - 6y = 0; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} 6x - 7y = 16, \\ 2x + 3y = -16; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} 5x + 3y = 2, \\ 3x + 5y = -18; \end{cases}$

ե) $\begin{cases} 4(x + 2y) - 8 = 5x - 2, \\ 3(2x - y) + 6 = 24y + 12; \end{cases}$ զ) $\begin{cases} 3(2x - y) - 14(5x - 3y) = 7, \\ 6x - 6y = 3: \end{cases}$

700. ա) $\begin{cases} 2x + y = 5, \\ 3x - 4y = 2; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x - 2y = -1, \\ 3x + 4y = 17; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} 2x - 6y = 0, \\ x + y = -4; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} 3{,}2x - 1{,}2y = 2, \\ 0{,}5x + 0{,}6y = 1{,}1; \end{cases}$

ե) $\begin{cases} 5{,}1x - 3{,}8y = 13, \\ 1{,}7x - 0{,}8y = 9; \end{cases}$ զ) $\begin{cases} 4{,}8x + 2{,}5y = 23, \\ 1{,}2x - 0{,}5y = 17; \end{cases}$

է) $\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 2x + y - z = 4, \\ 3x - y + z = 6; \end{cases}$ ը) $\begin{cases} x - y - z = -2, \\ x + 2y - 3z = 1, \\ 3x - 2y + z = -5; \end{cases}$

թ) $\begin{cases} 3x - 5y = -1, \\ 5x - 3z = 12, \\ 2y - 5z = -1: \end{cases}$

701. ***Դիոֆանտի*** (II դ.) ***«Թվաբանություն»-ից***: Բոլոր հնարավոր a, b, c և d թվերի համար լուծեք համակարգը.

ա) $\begin{cases} x + y = a, \\ x - 3y = b; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x + y = a, \\ \dfrac{x}{b} + \dfrac{y}{c} = d; \end{cases}$ գ) $\begin{cases} x + y = a, \\ \dfrac{x}{b} - \dfrac{y}{c} = \mathrm{d}: \end{cases}$

702.* Աշակերտները լուծում էին հավասարումների համակարգերը.

ա) $\begin{cases} 3x + 4y = 5, \\ 6x + 7y = 8; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 3x + 5y = 7, \\ 9x + 11y = 13; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} 2x + 5y = 8, \\ 11x + 14y = 17; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} 5x + 7y = 9, \\ 11x + 13y = 15: \end{cases}$

Չնայած այդ համակարգերն իրարից տարբեր են, բոլորի պատասխանները նույնը ստացվեցին: Գտեք այն կանոնը, ըստ որի՝ դրանք կազմված են: Ստուգեք ձեր կռահումը՝ կազմելով և լուծելով ևս մեկ համակարգ: Եթե դա հաջողվի, խնդիրը լուծեք ընդհանուրի դեպքում:

703. ա) $x - y = 3$ հավասարման համար ընտրեք երկրորդ հավասարում այնպես, որ ստացված հավասարումների համակարգը

1) ունենա մեկ լուծում,

2) ունենա անթիվ բազմությամբ լուծումներ,

3) լուծում չունենա:

բ) Բանավոր լուծեք հավասարումների համակարգը.

1) $\begin{cases} x + y = 1, \\ x + z = 2, \\ y + z = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x + 8y = 5, \\ 8x + 5y = 8: \end{cases}$

704. ա) Աշակերտը $5x + 15 = 3x + 9$ հավասարումը լուծեց այսպես. $5(x + 3) = 3(x + 3)$, $5 = 3$ և հայտարարեց, որ հավասարումը լուծում չունի, քանի որ բերում է անիմաստ արդյունքի: Աշակերտը ճի՞շտ է պնդում:

բ) Աշակերտը $\begin{cases} y = 2(1 - x) \\ 2x + y = 8 \end{cases}$ համակարգը լուծեց տեղադրման եղանակով. առաջին հավասարումից y-ի արժեքը տեղադրեց երկրորդ հավասարման մեջ: Բանավոր կատարեք այդ լուծումը և բացատրեք:

գ) Աշակերտը $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ y = 2(4 - x) \end{cases}$ համակարգը լուծեց տեղադրման եղանակով. y-ի արժեքը երկրորդ հավասարումից տեղադրեց առաջին հավասարման մեջ: Բանավոր կատարեք այդ լուծումը և բացատրեք:

705. Կազմեք երկու անհայտով երկու հավասարումների համակարգ, որի լուծումը

ա) $(2; 3)$; բ) $(1; 1)$; գ) $(-1; 2)$; դ) $(-1; -2)$

թվազույգն է:

706. ա) k-ի ի՞նչ արժեքի դեպքում է 5-ը $(k - 1)x^2 + 7x - 2k = 0$ հավասարման արմատ:

բ) Գտեք բերված տեսքի քառակուսային հավասարման գործակիցները, եթե հայտնի է, որ 10-ը և -15-ը այդ հավասարման արմատները են:

գ) Ապացուցեք, որ a, b և c ցանկացած թվային արժեքների համար $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 - c^2 = 0$ հավասարումն արմատներ ունի:

707. Գտեք՝ a-ի և b-ի ի՞նչ թվային արժեքների դեպքում համակարգն ունի անթիվ բազմությամբ լուծումներ կամ լուծում չունի.

ա) $\begin{cases} 5x + (a - 1)y = 3b, \\ x - 2y = 3; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x + 8y = b, \\ \dfrac{x}{a - 1} + (a - 3)y = a + 1: \end{cases}$

708. Ցանկացած a և b թվերի համար լուծեք հավասարումը.

ա) $x^2 + 2ax + a^2 - b^2 = 0$; բ) $x^2 - 2(a + b)x + 4ab = 0$;

գ) $x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$; դ) $x^2 - ax - 2a^2 = 0$:

709°. Լուծեք հավասարումը.

ա) $\dfrac{x-3}{x}=0;$ բ) $\dfrac{x}{x-1}=0;$

գ) $\dfrac{7}{x}=0;$ դ) $\dfrac{x+1}{x+1}=1:$

710. Լուծեք հավասարման համակարգը.

ա) $\begin{cases}\dfrac{x+2}{y-1}=\dfrac{1}{2},\\ xy+3y=1;\end{cases}$ բ) $\begin{cases}\dfrac{x-2}{y+1}=\dfrac{1}{4},\\ xy-4y=x:\end{cases}$

711. Գտեք ֆունկցիաների գրաֆիկների հատման կետերի կոորդինատները.

ա) $y=x$ և $y=-x;$ բ) $y=x$ և $y=2x-2;$

գ) $y=2x-1$ և $y=-2x;$ դ) $y=0{,}5x-2$ և $y=x+3:$

712. Հավասարումների համակարգը լուծեք գրաֆիկորեն.

ա) $\begin{cases}3x+y=1,\\ 2x-3y=-14;\end{cases}$ բ) $\begin{cases}4x-3y=0,\\ 3x+2y=17;\end{cases}$

գ) $\begin{cases}5x+2y=-1,\\ 2x-3y=-8;\end{cases}$ դ) $\begin{cases}x-y+1=0,\\ 2x+y-1=0;\end{cases}$

ե) $\begin{cases}7x-y-3=0,\\ 14x-2y+5=0;\end{cases}$ զ) $\begin{cases}3x+y-1=0,\\ 6x+2y-2=0;\end{cases}$

է) $\begin{cases}4x-2y+3=0,\\ x-3y-1=0;\end{cases}$ ը) $\begin{cases}3x+y=13,\\ 2x-3y-5=0:\end{cases}$

713. Պարզեք՝ քանի՞ լուծում ունի հավասարումների համակարգը և տվեք երկրաչափական մեկնաբանություն.

ա) $\begin{cases}2x+3y=5,\\ 2x+3y=-1;\end{cases}$ բ) $\begin{cases}2x-y=3,\\ 2x+y=3;\end{cases}$

գ) $\begin{cases}x-3y=5,\\ 2x-6y=10;\end{cases}$ դ) $\begin{cases}3x+y=5,\\ x+y=5:\end{cases}$

714. Հավասարումների համակարգը լուծեք գրաֆիկորեն.

ա) $\begin{cases}y=x^2-1,\\ y=x+1;\end{cases}$ բ) $\begin{cases}y=x^2+x,\\ y=6;\end{cases}$

գ) $\begin{cases} y = x^2 - 3x - 4, \\ y = -x^2; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} y = -x^2 + 4, \\ y = x^2 - 4: \end{cases}$

715.* ա) Ավտոմեքենան որոշ ժամանակ գնում էր a կմ/ժ արագությամբ, այնուհետև նույնքան ժամանակ՝ b կմ/ժ արագությամբ: a-ով և b-ով արտահայտեք մեքենայի միջին արագությունն ամբողջ ճանապարհի վրա (նշանակեք այն υ_1-ով):

բ) Ավտոմեքենան որոշ ճանապարհ անցավ a կմ/ժ արագությամբ, այնուհետև նույնքան ճանապարհ՝ b կմ/ժ արագությամբ: a-ով և b-ով արտահայտեք մեքենայի միջին արագությունն ամբողջ ճանապարհի վրա (նշանակեք այն υ_2-ով):

գ) Համեմատեք υ_1-ը և υ_2-ը (տե՛ս ա) և բ) խնդիրները):

դ) a և b դրական թվերի համար $\mathrm{A} = \dfrac{a+b}{2}$ թիվն անվանում են միջին թվաբանական, $\mathrm{G} = \sqrt{ab}$ թիվը՝ միջին երկրաչափական, միջին հարմոնիկ այն H թիվը, որի համար $\dfrac{1}{\mathrm{H}} = \dfrac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}$, որտեղից $\mathrm{H} = \dfrac{2ab}{a+b}$: Ապացուցեք, որ ճիշտ է $\mathrm{H} \leqslant \mathrm{G} \leqslant \mathrm{A}$ անհավասարությունը:

716.* Ո՞ր եղանակի դեպքում Մոսկվայից Սանկտ-Պետերբուրգ և հակառակը թռչող ինքնաթիռը կծախսի ավելի քիչ ժամանակ՝ խաղաղ (առանց քամի) եղանակի՞ն, թե՞ երբ Մոսկվայից Սանկտ-Պետերբուրգի ուղղությամբ փչում է հաստատուն արագությամբ քամի:

717. Ինչպիսի փոքրագույն արժեք կարող է ընդունել $a^2 + b^2$ արտահայտությունը, եթե $a > 0$, $b > 0$, $a + b = 2$:

718. Եռանկյան կողմերից մեկը 6 մ է, իսկ մյուս երկուսի գումարը՝ 14 մ: Գտեք եռանկյան կողմերի երկարությունների բոլոր հնարավոր արժեքները, եթե դրանք արտահայտվում են բնական թվերով:

719. Գտեք x-ի բոլոր այն արժեքները, որոնց դեպքում արտահայտությունն իմաստ ունի.

ա) $\dfrac{1}{x}$; բ) x; գ) $\dfrac{1}{x-1}$; դ) $\dfrac{1}{x+12}$:

Գտեք ֆունկցիայի որոշման տիրույթը (720-722).

720. ա) $y = \sqrt{x - 7}$; բ) $y = 2 + \sqrt{12 - x}$;

գ) $y = \sqrt{1 - 3x}$; դ) $y = \dfrac{3}{\sqrt{2x + 7}}$:

721. ա) $y = \sqrt{x + 1}$; բ) $y = \sqrt{3 - 2x}$;

գ) $y = \sqrt{x} + \sqrt{x - 1}$; դ) $y = \sqrt{3 + 4x} + \sqrt{7x - 5}$:

722. ա) $y = \dfrac{1}{x - 5}$; բ) $y = \dfrac{x}{x + 6} - \dfrac{3x}{3 - 7x}$;

գ) $y = \sqrt{4 - 3x} + \dfrac{1}{2x}$; դ) $y = \dfrac{x - 5}{3x - 1} + \sqrt{5 - x}$;

ե) $y = \sqrt{2x - 3}$; զ) $y = \sqrt{3x + 5}$;

է) $y = \sqrt{x^2 - 1}$; ը) $y = \sqrt{x^2 + 5}$:

723. Լուծեք անհավասարումը՝ համարելով, որ a-ն տրված թիվն է.

ա) $ax > 0$; բ) $ax > 1$; գ) $ax + 1 > 3$;
դ) $ax - 8 < 11$; ե) $ax > x$; զ) $ax + 1 > x$;

724. Ապացուցեք, որ եռանկյան կիսապարագիծը մեծ է դրա յուրաքանչյուր կողմից:

725.* Գտեք t-ի բոլոր այն արժեքները, որոնց դեպքում հավասարումն ունի երկու տարբեր արմատներ.

ա) $x^2 - 6x + t = 0$; բ) $(t + 3)x^2 + 2(t - 1)x + t = 0$:

726.* Գտեք t-ի բոլոր այն արժեքները, որոնց համար հավասարումն արմատներ չունի.

ա) $x^2 + 4x + 6t = 0$; բ) $tx^2 - 2(t - 2)x + t = 0$:

727.* Գտեք t-ի բոլոր այն արժեքները, որոնց դեպքում $2x^2 - 5x - t = 0$ հավասարումն ունի երկու իրարից տարբեր դրական արմատներ:

728. Գրաֆիկի օգնությամբ ցույց տվեք, որ $x^2 - 2x + t = 0$ հավասարումը

ա) $t < 0$ դեպքում ունի տարբեր նշանի երկու արմատներ, ընդ որում՝ դրական արմատի բացարձակ արժեքը մեծ է բացասական արմատի բացարձակ արժեքից:

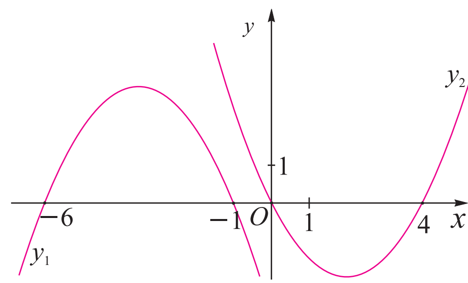
բ) $0 < t < 1$ դեպքում ունի երկու իրարից տարբեր դրական արմատներ:
գ) Ցանկացած $t > 1$ դեպքում արմատներ չունի:

729.* a-ի ինչպիսի արժեքների դեպքում $x^2 + ax + 4 = 0$ հավասարումն ունի իրարից տարբեր արմատներ:

730.* m-ի ինչպիսի արժեքների դեպքում հավասարումն արմատներ չունի.

ա) $2x^2 - 3mx + 1 = 0$; բ) $3mx^2 - x + m = 0$;
գ) $(m + 1)x^2 + mx + 3 + m = 0$:

731. Նկ. 42-ում պատկերված են y_1 և y_2-ով նշանակված երկու քառակուսային ֆունկցիաների գրաֆիկներ: x-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում են տեղի ունենում
ա) $y_1 \cdot y_2 > 0$
բ) $\dfrac{y_2}{y_1} < 0$
անհավասարումները:



Նկ. 42

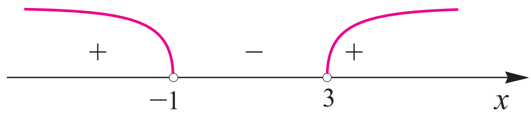
732. m-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում հավասարումն ունի երկու հավասար դրական արմատներ, երկու իրար հավասար բացասական արմատներ.

ա) $3x^2 + 4mx + 1 = 0$; բ) $mx^2 - (m + 1)x + 2 = 0$:

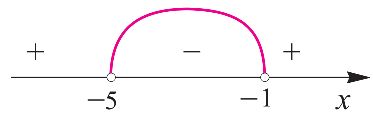
733. t-ի ինչպիսի՞ արժեքների դեպքում $x^2 + 2tx + t^2 - 1 = 0$ հավասարումն ունի երկու իրարից տարբեր արմատներ, որոնք պատկանում են նշված միջակայքին.
ա) $(0; 3)$; բ) $(1; 4)$; գ) $(-4; 0)$; դ) $(-5; -2)$:

734. t-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում $(t + 1)x^2 + 2(t - 1)x + t - 3 = 0$ հավասարումն ունի
ա) երկու բացասական արմատ,
բ) երկու դրական արմատներ,
գ) տարբեր նշանի արմատ, ընդ որում՝ դրական արմատի բացարձակ արժեքը մեծ է բացասական արմատի բացարձակ արժեքից,
դ) տարբեր նշանի արմատներ, ընդ որում՝ բացասական արմատն ունի ավելի մեծ բացարձակ արժեք:

735. Գտեք մեկ անհայտով երկրորդ աստիճանի անհավասարում, որի լուծումը կարելի է լուսաբանել
ա) 43. ա նկարով, բ) 43. բ նկարով:



ա)



բ)

Նկ. 43

736.* Լուծեք հավասարումը.

ա) $(x-2)(x-1)(x-3)=0$; բ) $(x+1)(x+2)(x-5)=0$;
գ) $(2x-3)(4-3x)=0$; դ) $(5x-1)(2x+7)=0$:

737. Լուծեք անհավասարումը.

ա) $\dfrac{x^2-2x-3}{x+5}>0$; բ) $\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-2x+3}<0$;

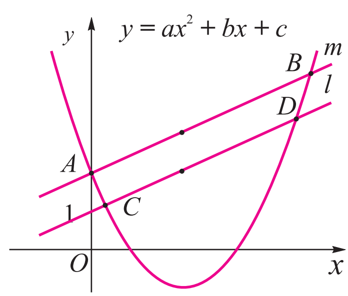
գ) $\dfrac{3-x-2x^2}{x^2-36}>0$; դ) $\dfrac{1,8}{x^3-x^2+x-1}<0$:

738.* m-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում $(m-2)x^2+(m+2)x+m=0$ հավասարումն ունի տարբեր արմատներ:

739. Անհավասարության միջոցով գրեք հետևյալ պնդումը. a և b թվերի նշանները
ա) տարբեր են, բ) նույնն են:

740.* p-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում $x^2+px-5=0$ հավասարման արմատներից մեկը մեծ է 1-ից, մյուսը՝ փոքր է 1-ից:

741.* Նկ. 44-ում պատկերված է $y=ax^2+bx+c$ պարաբոլը և իրար զուգահեռ m և l ուղիղները, որոնք պարաբոլը հատում են համապատասխանաբար A և B, C և D կետերում: Ապացուցեք, որ AB և CD հատվածների միջնակետերով անցնող ուղիղը զուգահեռ է Oy առանցքին:



Նկ. 44

Լուծեք հավասարումների համակարգը (742-746).

742. ա) $\begin{cases} 2x + 3y = 4, \\ 4x - 6y = 5; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} 9x - 10y = 3, \\ 2x - 3y = 6; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} 5x + 4y = 6, \\ 7x + 6y = 10; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} 5x + 3y = 15, \\ 10x - 6y = 0: \end{cases}$

743. ա) $\begin{cases} x^2 + y = 4, \\ x + y = 2; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x + y = 5, \\ x + y^2 = 13: \end{cases}$

744. ա) $\begin{cases} xy(x + y) = 6, \\ x^3 + y^3 = 9; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x + y = 2, \\ x^2 + y^2 - 2 = 0: \end{cases}$

745. ա) $\begin{cases} \dfrac{y-3}{x+2} = \dfrac{1}{3}, \\ xy + 3x + 4y = 0; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} \dfrac{x}{y-1} + \dfrac{y-1}{x = 6,} = 2, \\ 2x - 3y = 5: \end{cases}$

746. ա) $\begin{cases} x + xy + y = 11, \\ x^2y + xy^2 = 30; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4, \\ 5x + 6y = 27: \end{cases}$

747. Լուծեք հավասարումների համակարգը.

ա) $\begin{cases} (x - 5)(x + y) = -20, \\ (y - 8)(x + y) = -10; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} (x + 3y - 6)y - 2x = 0, \\ (2x + y - 12)y - 2x = 0; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} (x + 10)(y - 12) = 0, \\ \dfrac{y^2 - 160}{y - 2x} = 0{,}2x; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} xy + 5(x - y) = 7, \\ x^2 + y^2 + 5(x - y) = 10; \end{cases}$

ե) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x - y = 44, \\ \dfrac{y}{2} - \dfrac{2}{x} = 1 - \dfrac{y}{x}; \end{cases}$ զ) $\begin{cases} x + y = xy, \\ xy = x^2 + y^2 \end{cases}$

է) $\begin{cases} 2x^2 - 4xy + 3y^2 = 36, \\ 3x^2 - 4xy + 2y^2 = 36; \end{cases}$ ը) $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 3y^2 = 128, \\ 3x^2 - 3xy + 2y^2 = 128: \end{cases}$

748. Կառուցեք ֆունկցիայի գրաֆիկը.

ա) $y = x^2 - 7x$; բ) $y = 3 - x^2$;

գ) $y = x^2 - 5x - 6$; դ) $y = 3x^2 - x + 1$:

749. Հավասարումների համակարգը լուծեք գրաֆիկորեն.

ա) $\begin{cases} y = x^2 + 1, \\ y = x + 7; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} y = -x^2 - 2, \\ y = 1 - x^2; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} y = x^2 - 1, \\ y = 1 - x^2; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} y = 2x - 1, \\ y = 2x^2 - 1; \end{cases}$

ե) $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1, \\ y = \dfrac{1}{x}; \end{cases}$ զ) $\begin{cases} y = -x^2 - 2, \\ y = -\dfrac{8}{x}: \end{cases}$

750. Լուծեք հավասարումների համակարգը.

ա) $\begin{cases} |x - 1| + y = 0, \\ 2x - y = 1; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} |y - 4| = x, \\ 3x + y = 1: \end{cases}$

751. Կառուցեք ֆունկցիայի գրաֆիկը.

ա) $y = x$; բ) $y = -2x + 1$;

գ) $y = \dfrac{1}{3}x - 2$; դ) $y = -2{,}5x - 1$:

752. Գտեք a և b թվերը, որոնց համար $x + y = -b$ և $x - ay - 2 = 0$ ուղիղները

ա) հատվում են (1; 1) կետում,
բ) զուգահեռ են,
գ) համընկնում են:

753. Կառուցեք $y = 3x - 1$ ֆունկցիայի գրաֆիկը. x-ը փոխարինեք y-ով, իսկ y-ը՝ x-ով, և կառուցեք ստացված ֆունկցիայի գրաֆիկը նույն կոորդինատային համակարգում:

754. Կառուցեք $y = 3x^2 + 1$ ֆունկցիայի գրաֆիկը: Գրաֆիկի օգնությամբ գտեք

ա) $y(1)$-ը, բ) $y(-2)$-ը,
գ) x_0-ն, այնպես որ $y(x_0) = 1$, դ) x_0-ն, այնպես, որ $y(x_0) = 2$:

755. Պատկանո՞ւմ է արդյոք (–0,2; 0,4) կետը $y = x^2$ ֆունկցիայի գրաֆիկին:

756. Գտեք x-ի այն արժեքը, որի դեպքում y-ի համապատասխան արժեքը փոքրագույնն է, եթե

ա) $y = (x + 1)^2 - 3$; բ) $y = (x - 2)^2 + 5$:

757. Հավասարումների համակարգը լուծեք գրաֆիկորեն.

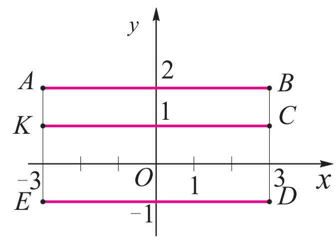
ա) $\begin{cases} 2x + y = 4, \\ x - y = -1, \\ y = 2; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x + y = 2, \\ -2x + y = 5, \\ 2x + 3y = 7: \end{cases}$

758. Գրեք տրված կետերի Oy առանցքի նկատմամբ համաչափ կետերի կոորդինատները և կառուցեք այդ կետերը.

ա) A(4; 3); բ) B(5; 0); գ) C(–3; 2); դ) D(–6; 0):

759. Գտեք տրված կետերի կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ համաչափ կետերի կոորդինատները և կառուցեք այն:

760. Նկ. 53-ում նշված են A, B, C, D, E, K կետերը: Դրանց մեջ կա՞ն արդյոք կոորդինատային առանցքների կամ կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ համաչափ կետեր (Եթե այո, ապա նշեք դրանք):



Նկ. 53

761. Կառուցեք $y = x$ և $y = x^2$ ֆունկցիաների գրաֆիկները: Գոյություն ունե՞ն այդ ֆունկցիաների գրաֆիկներին պատկանող կետեր, որոնք համաչափ են

ա) աբսցիսների առանցքի,

բ) օրդինատների առանցքի,

գ) կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ:

762. Գտեք p-ի այն արժեքը, որի համար $2x^2 - 5x + p = 0$ հավասարման արմատները բավարարում են

$$\frac{x_2^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} = \frac{65}{8}$$

պայմանին:

763. Գտեք q-ի այն դրական արժեքը, որի դեպքում $2x^2 + qx + 18 = 0$ հավասարման արմատները բավարարում են

$$\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{x_2^2} = \frac{65}{324}$$

պայմանին:

764. Գտեք p-ի այն արժեքը, որի համար $6x^2 + 3x - p = 0$ հավասարման արմատները բավարարում են

$$x_1 \cdot x_2^4 + x_2 \cdot x_1^4 = \frac{63}{8}$$

պայմանին:

765. b-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում անհավասարումը ճիշտ չէ x-ի ցանկացած արժեքի համար.

ա) $3x^2 - bx - 1 < 0$; բ) $x^2 + bx + 4 < 0$:

766. m-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում անհավասարումը լուծում չունի.

ա) $x^2 - 4x + m < 0$; բ) $x^2 + 2x + m < 0$;
գ) $x^2 - mx + 4 < 0$; դ) $x^2 + mx + 9 < 0$:

Կոորդինատային հարթության վրա շտրիխապատեք բոլոր այն կետերը, որոնց կոորդինատները բավարարում են նշված պայմաններին (767-769).

767. ա) $x \geqslant 2$; բ) $y \leqslant 3$; գ) $x \geqslant 2$ և $y \leqslant 3$;
դ) $x \geqslant 2$ կամ $y \leqslant 3$; ե) $x \leqslant -1$ կամ $y \geqslant 1$;
զ) $\begin{cases} |x| \leqslant 2, \\ |y| \leqslant 2; \end{cases}$ է) $\begin{cases} |x| \geqslant 2, \\ |y| \geqslant 2; \end{cases}$
ը) $x^2 + y^2 \leqslant 4$; թ) $x^2 + y^2 \geqslant 1$;
ժ) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4, \\ x^2 + y^2 \geqslant 1; \end{cases}$ ի) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leqslant 4$:

768. ա) $x < -3$; բ) $y > -1$; գ) $x < -3$ և $y > -1$;
դ) $x < -3$ կամ $y > -1$; ե) $x > -3$ կամ $y < -1$;
զ) $\begin{cases} |x| < 3, \\ |y| < 3; \end{cases}$ է) $\begin{cases} |x| > 3, \\ |y| > 3; \end{cases}$
ը) $x^2 + y^2 < 9$; թ) $x^2 + y^2 > 4$;
ժ) $\begin{cases} x^2 + y^2 < 9, \\ x^2 + y^2 > 4; \end{cases}$ ի) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 > 4$:

769. ա) $\begin{cases} y \geqslant -2x + 1, \\ y \geqslant x - 2; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} y \leqslant -x^2 + 4, \\ y \geqslant x + 2: \end{cases}$

770.* Նշեք կոորդինատային հարթության բոլոր այն կետերը, որոնց կոորդինատները բավարարում են

$$(|x| - 1)^2 + (y - 1)^2 \leqslant 1$$

անհավասարության կամ

$$\begin{cases} (|x| - 1)^2 + (|y| - 1)^2 \geqslant 1, \\ |x| + |y| \leqslant 1 \end{cases}$$

անհավասարումների համակարգին:

771.* Ապացուցեք անհավասարությունը.

ա) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} \geqslant 3$, եթե $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$;

բ) $\dfrac{a^3 + b^3}{2} \geqslant \left(\dfrac{a + b}{2}\right)^3$, եթե $a > 0$, $b > 0$;

գ) $(a + b)^4 \geqslant 8a^4 + 8b^4$;

դ) $(a + 2)(b + 2)(a + b) \geqslant 16ab$, եթե $a > 0$, $b > 0$;

ե) $ab(a + b) \leqslant a^3 + b^3$, եթե $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$;

զ) $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ac)$, եթե a, b և c-ն եռանկյան կողմերն են:

772. Գտեք հետևյալ բանաձևով տրված $\{x_n\}$ հաջորդականության փոքրագույն անդամը.

ա) $x_n = n^2 - 6n + 5$; բ) $x_n = n^2 - 18n + 1$;

գ) $x_n = 3n^2 - 16n - 1$; դ) $x_n = 7n^2 - 50n$:

773. Գրեք բազմանդամ, որի անդամները տրված թվերն են.

ա) 1, 2, 3, 4; բ) –2, –1, 0, 6:

774. Բազմանդամը ներկայացրեք գծային արտադրիչների արտադրյալի տեսքով.

ա) $x^3 - 6x$; բ) $x - 5x^3$;

գ) $3x^2 - 25$; դ) $x^2 - 2$;

ե) $2x^2 + 8x - 7$; զ) $3x^2 - 5x + 2$;

է) $3x^2 - 6x - 12$; ը) $8x^3 + 54x + 36x^2 + 27$:

Համարելով, որ a-ն և b-ն տրված թվերն են, բազմանդամը վերլուծեք գծային արտադրիչների (775-777).

775. ա) $x^2 - (1 + a)x + a$; բ) $4x^2 - 2(1 + a)x + a$:

776. ա) $2ax^2 - (2 + a)x + 1$; բ) $6 + (2 - 3a)x - ax^2$:

777. ա) $(b - 2a)x + 2 - abx^2$; բ) $b - (a + b^2)x + abx^2$:

778. Բազմանդամը վերլուծեք արտադրիչների.
ա) $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$;
բ) $x^4 + x^2 + 1$; գ) $x^8 + x^4 + 1$:

779. p-ի ի՞նչ արժեքների դեպքում $2x^2 + x + 2p^2 = 0$ հավասարումը
ա) արմատներ չունի,
բ) ունի հավասար արմատներ,
գ) ունի իրարից տարբեր արմատներ:

780. Լուծեք հավասարումը՝ համարելով, որ k-ն տրված թիվն է.
ա) $x^2 + 2kx + (k - 1)^2 = 0$; բ) $x^2 - kx + k - 1 = 0$:

781. Նշեք պայմաններ, որոնց տեղի ունենալու դեպքում կլինի $ax^2 + bx + c = 0$ հավասարումը, որտեղ a, b և c-ն ռացիոնալ թվեր են, ունեն իռացիոնալ արմատներ:

782. Գրաֆիկի օգնությամբ ցույց տվեք, որ $2x^2 + 3x + m = 0$ հավասարումը
ա) $m < 0$ դեպքում ունի տարբեր նշանի երկու արմատ, ընդ որում՝ բացասական արմատի բացարձակ արժեքը մեծ է դրական արմատի բացարձակ արժեքից:
բ) $0 < m < 1\frac{1}{8}$ դեպքում հավասարումն ունի երկու իրարից տարբեր բացասական արմատներ:
գ) $m > 1\frac{1}{8}$ դեպքում հավասարումն արմատ չունի:

783.* Գրաֆիկի օգնությամբ հետազոտեք հավասարման արմատների քանակի կախվածությունը a-ից, որտեղ a-ն տրված թիվն է.
ա) $x^2 - x + a = 0$; բ) $x^2 + x - a = 0$;
գ) $x^2 - 4x + a = 0$; դ) $x^2 + ax + 4 = 0$;
ե) $0{,}2x^2 + 2{,}1x + a = 0$; զ) $3x^2 + 7ax + 4 = 0$:

784. a, b, c-ի ի՞նչ արժեքների (կամ ինչ կապի) դեպքում $ax^2 + bx + c$ քառակուսային եռանդամի
ա) արմատների գումարը հավասար է դրանց արտադրյալին,
բ) եռանդամի արմատների բացարձակ արժեքներն իրար հավասար են:

785. $x^4 + 2x^3 + mx^2 + 2x + n$ բազմանդամը հավասար է մեկ այլ բազմանդամի քառակուսու: Գտեք m-ը և n-ը:

786. Ինչպիսի՞ն պետք է լինեն p և q թվերը, որպեսզի $x^2 + px + q = 0$ հավասարման արմատները լինեն p և q:

787. a-ի ի՞նչ արժեքի դեպքում

$$\begin{cases} x - 2y = a \\ 2x - y = a + 1 \end{cases}$$

համակարգի լուծում հանդիսացող թվազույգի թվերի քառակուսիների գումարը փոքրագույնն է:

Լուծեք հավասարումների համակարգը (788-792).

788. ա) $\begin{cases} x + xy + y = 11, \\ x + y + xy = 7; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 8(x - y), \\ x^2 + xy + y^2 = 4: \end{cases}$

789. ա) $\begin{cases} x + xy + y = 11, \\ x^2 + y^2 + xy = 13; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 8(x - y), \\ x + xy + y = 2: \end{cases}$

790. ա) $\begin{cases} (x - y)(x^2 + y^2) = 447, \\ xy(x - y) = 210; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} xy(x + y) = 20, \\ x + y = \dfrac{5}{4}xy: \end{cases}$

791. ա) $\begin{cases} x + y^2 = 3, \\ x^2 + y = 3; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} x^2 + xy = y^2, \\ x - y^2 = 0: \end{cases}$

792. ա) $\begin{cases} xy = 6, \\ yz = 3, \\ xz = 2; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} yz = \dfrac{2}{3}x, \\ zx = \dfrac{3}{2}y, \\ xy = 6z: \end{cases}$

Հավասարումների համակարգը լուծեք գրաֆիկորեն (793-795).

793. ա) $\begin{cases} xy = -6, \\ y = -x^2 + 5; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} y = x^2 - 4, \\ xy = 4: \end{cases}$

794. ա) $\begin{cases} y = x^2 - 2x - 3, \\ y = |x - 1|; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} y = -x^2 + 5x - 6, \\ y = |x + 1|: \end{cases}$

795. ա) $\begin{cases} y = 2x^2 - 1, \\ y = -x^2 - 3x - 2; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} y = x^2 + 5x + 4, \\ y = -x^2 + 6: \end{cases}$

Լուծեք անհավասարումը (796-798).

798. ա) $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{2}{x+1} < \dfrac{8}{x^2-1};$ բ) $\dfrac{4}{x+1} - \dfrac{x}{x-1} > \dfrac{3}{x^2-1}:$

797. ա) $1 < \dfrac{3x-1}{2x+1} < 2;$ բ) $1 < \dfrac{2x-1}{3x+1} < 2:$

798. ա) $(1+x)^2 < |1-x^2|;$ բ) $|1-x^2| < (1-x)^2:$

799. $x^2 - x - a = 0$ հավասարման արմատներից մեկը $a + 1$ է:
Գտեք մյուս արմատը:

800. b-ի ի՞նչ արժեքի դեպքում
$x^2 + b^2x + 3b^3 = 2b^2x - b + 12 + 2b^3$
հավասարումն ունի $x = 3$ արմատ:

801. $\dfrac{a+9}{a+8}$ արտահայտությունը կարո՞ղ է ամբողջ թիվ լինել:
Եթե այո, ապա a-ի ի՞նչ արժեքի դեպքում (a-ն ամբողջ թիվ է):

802. Ո՞ր թիվն է մեծ.
ա) $\dfrac{10^{1986}+1}{10^{1987}+1}$ կամ $\dfrac{10^{1987}+1}{10^{1988}+1};$ բ) $\dfrac{a^n+1}{a^{n+1}+1}$ կամ $\dfrac{a^{n+1}+1}{a^{n+2}+1};$
որտեղ a-ն և n-ը բնական թվեր են:

803.* ***Բհասկարա II-ի խնդիրը*** (1114-1178): Գտեք
$$100x + 90 = 63y$$
հավասարման ամբողջ լուծումները:

804.* ***Լ. Ն. Տոլստոյի խնդիրը:*** 100 ռ-ով գնեցին 100 անասուն՝ հորթը կես ռուբլով, կովը՝ 3 ռ-ով, ցուլը՝ 10: Քանի՞ հորթ, կով և ցուլ գնեցին:

805. Կառուցեք ֆունկցիայի գրաֆիկը.
ա) $y = \dfrac{1}{x-1};$ բ) $y = \dfrac{1}{x+2};$ գ) $y = \dfrac{1}{1-x};$

դ) $y = \dfrac{4}{4-x}$; ե) $y = \dfrac{1}{x-1} + 1$; զ) $y = \dfrac{1}{2-x} - 3$;

է) $y = \dfrac{3}{x+2} - 1$; ը) $y = \dfrac{2}{x-3} + 4$; թ) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$;

ժ) $y = \dfrac{x-3}{x+4}$; ի) $y = \dfrac{2x-1}{3x-1}$; լ) $y = \dfrac{3x+1}{2x-1}$:

806. Օգտագործելով համապատասխան ֆունկցիայի գրաֆիկը՝ լուծեք անհավասարումը.

ա) $\dfrac{1}{x} > 0$; բ) $\dfrac{1}{x} < 0$; գ) $-\dfrac{2}{x} > 0$; դ) $-\dfrac{4}{x} < 0$;

ե) $\dfrac{1}{x} > 1$; զ) $\dfrac{1}{x} < 2$; է) $\dfrac{2}{x} > 3$; ը) $-\dfrac{2}{x} > 3$:

807. Հավասարումների համակարգը լուծեք գրաֆիկորեն.

ա) $\begin{cases} xy = 1, \\ y = x^2; \end{cases}$ բ) $\begin{cases} xy = -8, \\ y = x + 1; \end{cases}$

գ) $\begin{cases} y = x^2 - 4x - 5, \\ y = -\dfrac{12}{x}; \end{cases}$ դ) $\begin{cases} y = |x|, \\ y = \dfrac{6}{x}: \end{cases}$

808. ա) Հիմա առավոտյան ժամը 9-ն է: Օրվա մնացած մասն անցածի ո՞ր մասն է կազմում, և ո՞ր մասն է մնում:

բ) Ջուրը սառույց դառնալիս ավելանում է իր ծավալի $\dfrac{1}{11}$-րդ մասով: Քանի՞ խորանարդ սմ ջուր կստացվի 24 սմ^3 ծավալով սառույցից: Իր ծավալի ո՞ր մասն է կորցնում սառույցը ջուր դառնալիս:

գ) 20-ը բաժանեք երկու մասի այնպես, որ մեկը մյուսից 4 անգամ մեծ լինի:

դ) 120-ը բաժանեք 2 : 3 : 15 հարաբերությամբ մասերի:

ե) 25-ը բաժանեք 2, 3, 5 թվերին համեմատական մասերի:

809. Երեք բանվոր որոշ աշխատանք կատարում են 12 հերթափոխում: Քանի՞ հերթափոխում կկատարեն նույն աշխատանքը երկու բանվոր, եթե բոլորի արտադրողականությունը նույնն է:

810. ա) Առաջին թիվը չորս անգամ մեծ է երկրորդից: Եթե երկրորդ թիվը մեծացնենք վեց անգամ, ապա այն առաջինից 4-ով մեծ կդառնա: Գտեք այդ թվերը:

բ) Առաջին թիվը երեք անգամ փոքր է երկրորդից: Եթե առաջին թիվը բազմապատկենք 8-ով, երկրորդը՝ 2-ով, ապա առաջին թիվը 8-ով մեծ կդառնա երկրորդից: Գտեք այդ թվերը:

811. ա) Առաջին թիվը չորս անգամ փոքր է երկրորդից: Եթե առաջին թիվը մեծացնենք վեց անգամ, ապա ստացված թիվը 6-ով փոքր կլինի երկրորդից: Գտեք այդ թվերը:
բ) Առաջին թիվը 3-ով մեծ է երկրորդից: Եթե առաջին թիվը բազմապատկենք 3-ով, ապա ստացված թիվը 1-ով մեծ կլինի երկրորդի հնգապատիկից: Գտեք այդ թվերը:

812. ա) Առաջին թիվը 8-ով փոքր է երկրորդից: Եթե առաջին թիվը մեծացնենք 17-ով, ապա ստացված թիվը հավասար կլինի երկրորդի կրկնապատիկին: Գտեք այդ թվերը:
բ) Տրված են երկու թվեր: Եթե առաջինը բազմապատկենք 3-ով, ապա ստացված թիվը 16-ով մեծ կլինի երկրորդից, իսկ եթե երկրորդը բազմապատկենք 2-ով, ապա ստացված թիվը 8-ով մեծ կլինի առաջինից: Գտեք այդ թվերը:

813. ա) Բանվորների բրիգադը 14 օրում պետք է պատրաստեր նախատեսված քանակով դետալներ: Ավելացնելով աշխատանքի արտադրողականությունը, բրիգադը, օրական 5 դետալ ավելի պատրաստելով, առաջադրանքն ավարտեց 12 օրում: Որքա՞ն դետալ էր նախատեսված պլանով:
բ) Բանվորների բրիգադը 13 օրում պետք է պատրաստեր նախատեսված քանակով դետալներ: Ավելացնելով աշխատանքի արտադրողականությունը՝ բրիգադն օրական պլանով նախատեսվածից 50 դետալ ավելի էր պատրաստում: Այդ պատճառով արդեն 12 օրում ոչ միայն կատարեց պլանը, այլև նախատեսվածից 100 դետալ ավելի պատրաստեց: Քանի՞ դետալ պատրաստեց բրիգադը:
գ) Մեքենաների թողարկման պատվերը պլանով պետք էր կատարել 20 օրում: Բայց գործարանը օրական պլանից դուրս պատրաստում էր 2 մեքենա ավելի և այդ պատճառով պատվերը կատարեց 18 օրում: Պլանով օրական քանի՞ մեքենա պետք է պատրաստեր գործարանը:

814. Կազմեք երկու խնդիր, որոնք նման են նախորդ համարի խնդիրներին: Լուծեք այդ խնդիրները:

815. ա) Երկու վայրերի հեռավորությունը 20 կմ է: Այդ վայրերից միաժամանակ իրար դիմաց դուրս եկան մոտոցիկլավարը և հեծանվորդը: Մոտոցիկլավարի արագությունը 50 կմ/ժ է, հեծանվորդինը՝ 10 կմ/ժ: Մոտոցիկլավարի շարժման վայրից ի՞նչ հեռավորության վրա նրանք կհանդիպեն:

բ) Երկու վայրերի հեռավորությունը 20 կմ է: Այդ վայրերից միաժամանակ իրար դիմաց դուրս եկան մոտոցիկլավարը և հեծանվորդը՝ համապատասխանաբար 40 և 20 կմ/ժ արագություններով: Քանի՞ ժամից նրանք կհանդիպեն:

816. Կազմեք նախորդ կետի խնդիրներին նման խնդիրներ և լուծեք դրանք:

817.* Երկու վայրերի հեռավորությունը 40 կմ է: Այդ վայրերից միաժամանակ դուրս եկան ավտոբուսը և հեծանվորդը: Ավտոբուսի արագությունը 50 կմ/ժ է, հեծանվորդինը՝ 10 կմ/ժ: Ավտոբուսը տեղ հասավ, 6 րոպե կանգ առավ և նույն արագությամբ շարժվեց հակառակ ուղղությամբ: Առաջին վայրից ի՞նչ հեռավորության վրա կհանդիպեն ավտոբուսը և հեծանվորդը:

818.* Կազմեք և լուծեք նախորդ խնդրի նման խնդիր:

819. Մի բնակավայրից դուրս եկավ հեծանվորդը 10 կմ/ժ արագությամբ: 1 ժամ հետո նրա ետևից դուրս եկավ երկրորդ հեծանվորդը՝ 20 կմ/ժ արագությամբ: Նախատեսված վայրը հասան միաժամանակ: Ի՞նչ կարելի է որոշել՝ օգտագործելով այս տվյալները:

820. Երկու գնացք իրար ետևից մեկնեցին նույն վայրից: Առաջինի արագությունը 36 կմ/ժ է, երկրորդինը՝ 48 կմ/ժ: Քանի՞ ժամ հետո երկրորդ գնացքը կհասնի առաջինին, եթե հայտնի է, որ առաջին գնացքը 2 ժ շուտ էր մեկնել երկրորդից: Խնդիրը լուծելու համար ի՞նչ է անհրաժեշտ ենթադրել:

821. Ջերմանավը երկու նավահանգիստների միջև եղած հեռավորությունը գետի հոսանքով անցավ 4 ժամում, հոսանքին հակառակ՝ 5 ժ-ում: Որոշեք նավահանգիստների հեռավորությունը, եթե գետի հոսանքի արագությունը 2 կմ/ժ է:

822. Ապացուցեք, որ եթե բոլոր գումարելիները մեծացվեն կամ փոքրացվեն միևնույն թիվ անգամ, ապա գումարը նույնպես կմեծանա կամ կփոքրանա միևնույն թիվ անգամ:

823. Ինչպես կփոխվի տարբերությունը, եթե նվազելին և հանելին մեծացվի (կամ փոքրացվի) միևնույն թիվ անգամ:

824. ա) 0; 1; 2; 2; 2 թվանշաններով հնգանիշ թիվը բնական թվի քառակուսի է: Գտեք այդ թիվը:
բ) Գտնել այն ամենամեծ և ամենափոքր բացասական թվերը, որոնք կարելի է գրառել երեք 1-ով և թվաբանական գործողությունների նշաններով:

825. Գրված են մի քանի թվեր: Դրանցից յուրաքանչյուրը, սկսած երրորդից, հավասար է նախորդ երկուսի գումարին: Հայտնի է, որ իններորդ և տասներորդ թվերը 1 են: Գտեք առաջին և երկրորդ թվերը:

826. Աղյուսակը լրացրեք այնպես, որ յուրաքանչյուր վանդակում տառի փոխարեն լինի թիվ, ընդ որում՝ յուրաքանչյուր տողի, սյան և մեծ անկյունագծի թվերի գումարներն իրար հավասար լինեն:

a	b	x	–2
2	–3	–4	5
x	c	–1	0
k	x	e	y

827. Քառակուսու ինը վանդակներից յուրաքանչյուրում գրված է մեկ թիվ: Յուրաքանչյուր տողի թվերի գումարը հաշվելիս ստացան համապատասխանաբար –6,1; 2,5 և –3,4: Իսկ յուրաքանչյուր սյան թվերի գումարները հաշվելիս ստացան համապատասխանաբար 2,3; –5,8; –3,7: Ապացուցեք, որ հաշվարկներում սխալ է թույլ տրված:

828. Բերքը հավաքելու համար աշխատում էին երկու բրիգադներ: Առաջին օրը առաջին բրիգադը 5 հա ավելի հավաքեց, քան երկրորդը: Երկրորդ օրը առաջին բրիգադը հավաքեց 3 հա ավելի, քան հավաքել էր առաջին օրը, իսկ երկրորդ բրիգադը 2 անգամ ավելի, քան առաջին օրը: Քանի հա հավաքեց բրիգադներից յուրաքանչյուրն առաջին օրում, երկու օրվա ընթացքում բրիգադները միասին հավաքեցին 63 հա:

829.* Ոսկու և պղնձի երկու համաձուլվածքներից առաջինում դրանց զանգվածների հարաբերությունը 1 : 2 է, իսկ երկրորդում՝ 2 : 3: Եթե առաջին համաձուլվածքի $\frac{1}{3}$-ը ձուլենք երկրորդի $\frac{5}{6}$-ի հետ, ապա ստացված համաձուլվածքը կպարունակի այնքան ոսկի, որքան պղինձ կար առաջին համաձուլվածքում, իսկ եթե առաջին համաձուլվածքի $\frac{2}{3}$-ը ձուլեինք երկրորդի կեսի հետ, ապա ստացված համաձուլվածքում պղինձը 1 կգ-ով ավելի կլինի երկրորդ համաձուլվածքի ոսկուց: Որքա՞ն ոսկի կար յուրաքանչյուր համաձուլվածքում:

830. Պահանջվում է 10% և 20% աղի լուծույթներից ստանալ 50 գ 15% աղի լուծույթ: Քանի՞ գ պետք է վերցնել յուրաքանչյուր լուծույթից:

831. ա) Առաջին բանվորը որոշ աշխատանք կարող է 4 ժ-ով շուտ կատարել, քան երկրորդը: Սկզբում նրանք 2 ժ աշխատեցին համատեղ, որից հետո մնացած աշխատանքը կատարեց առաջին բանվորը 1 ժամում: Որքա՞ն ժամանակում ամբողջ աշխատանքը կարող է կատարել երկրորդ բանվորը:
բ) Երկու բանվոր պետք է կատարեն որոշակի աշխատանք: Սկզբում 2 ժ աշխատեց առաջին բանվորը, այնուհետև նրան միացավ երկրորդը, և միասին աշխատեցին ևս 1 ժամ: Դրանից հետո մնացած աշխատանքը երկրորդ բանվորը ավարտեց 3 ժամում: Որքան ժամանակում բանվորներից յուրաքանչյուրը կարող է կատարել ամբողջ աշխատանքը, եթե առաջինին դրա համար անհրաժեշտ է 1 ժ քիչ ժամանակ, քան երկրորդին:

832. ա) Բեռնողների երկու բրիգադներ բեռնանավը պետք է բեռնաթափեին 6 ժամում: Առաջին բրիգադը կատարեց ամբողջ աշխատանքի $\frac{3}{5}$ մասը, որից հետո երկրորդ բրիգադն ավարտեց ամբողջ աշխատանքը: Ամբողջ աշխատանքը կատարվեց 12 ժամում: Յուրաքանչյուր բրիգադ, աշխատելով առանձին, քանի՞ ժամում կբեռնաթափի բեռնանավը:
բ) Երկու բանվորների հանձնարարված էր պատրաստել միատեսակ դետալների հավաքածու: Այն բանից հետո, երբ առաջինն աշխատեց 7 ժամ, իսկ երկրորդը՝ 4, պարզվեց, որ նրանք կատարել են ամբողջ աշխատանքի $\frac{5}{9}$ մասը: Աշխատելով համատեղ ևս 4 ժ՝ պարզեցին, որ մնում է կատարել աշխատանքի $\frac{1}{18}$ մասը: Աշխատելով առանձին՝ յուրաքանչյուր բանվոր քանի՞ ժամում կկատարի ամբողջ աշխատանքը:

833.* Հայր և որդի սկսեցին հնձել երկու հարևան մարգագետինները, որոնց մակերեսները հարաբերում են ինչպես 8 : 7: Երբ հայրը հնձեց մեծ մարգագետնի $\frac{3}{4}$ մասը, իսկ որդին՝ փոքր մարգագետնի կեսից ավելին, նրանք նստեցին հանգստանալու և հաշվարկեցին, որ եթե շարունակեն աշխատել նույնքան լավ, ինչպես աշխատում էին, բայց տեղափոխվեն, ապա աշխատանքը կավարտեն միաժամանակ: Հայրը որդուց քանի՞ անգամ էր արագ հնձում:

834. ***Հնագույն խնդիր*** (Չինաստան, II դ.): Համատեղ հավ են գնում: Եթե յուրաքանչյուրը տա 9 (դրամական միավոր), ապա կավելանա 11, իսկ եթե յուրաքանչյուրը տա 6, կպակասի 11: Քանի՞ մարդ կար, և ի՞նչ արժեր հավը:

835. ***Հնագույն խնդիր*** (Հին Բաբելոն): Գտեք ձողի երկարությունը, որը սկզբում պատին հենված էր ուղղաձիգ, այնուհետև տեղաշարժվեց այնպես, որ վերին ծայրակետն իջավ 3 բազուկ, իսկ ստորինը պատից հեռացավ 9 բազուկ:

836. ***Հնագույն խնդիր*** (Հին Բաբելոն, 1950 թ. մ.թ.ա.): Երկու քառակուսիներից բաղկացած A տարածքի մակերեսը 1000 է: Քառակուսիներից մեկի կողմը 10-ով փոքր է մյուսի կողմի $\frac{2}{3}$-ից: Ինչի՞ են հավասար քառակուսիների կողմերը:

837. ***Արիաբհատայի խնդիրը*** (476-550 թ.): Երկու տարբեր մարդիկ ունեն հավասար կապիտալ, որն արտահայտվում է միևնույն արժողությամբ իրերով և դրամով: Բայց ինչպես իրերի թիվը, այնպես էլ դրամի քանակը նրանց մոտ տարբեր են: Որքա՞ն արժի իրը:
Ցուցում: Համարեք, որ առաջինն ունի a իր և b դրամ, իսկ երկրորդը՝ c իր և d դրամ, ընդ որում՝ a, b, c և d-ն տրված են, և $a \neq c$, $b \neq d$:

838. ***Բեզուի խնդիրը:*** Համաձայն պայմանագրի՝ յուրաքանչյուր աշխատած օրվա համար աշխատողը ստանում է 48 ֆրանկ (դրամական միավոր է), իսկ չաշխատածի համար հանվում է 12 ֆրանկ: 30 օր հետո պարզվեց, որ աշխատողը ոչինչ չի ստանալու: Քանի՞ օր էր աշխատել նա այդ ընթացքում:

839.* Մի վարպետ սենյակը կարող է պաստառել a ժամում, իսկ մյուսը՝ b: Եթե նրանք համատեղ աշխատեն, ապա յուրաքանչյուրի արտադրողականությունը կավելանա p %-ով: Համատեղ աշխատելով քանի՞ ժամում կպատրաստեն սենյակը, եթե

ա) $a = 6$, $b = 4$, $p = 20$; բ) $a = 3$, $b = 7$, $p = 40$:

840.* Մի աշխատողը ջրհորը կարող է փորել a օրում, մյուսը՝ b: Եթե նրանք համատեղ աշխատեն, ապա յուրաքանչյուրի աշխատանքի արտադրողականությունը կավելանա 1 %-ով, և ջրհորը կփորեն c օրում: Քանի՞ տոկոսով է ավելանում աշխատողներից յուրաքանչյուրի արտադրողականությունը համատեղ աշխատանքի դեպքում, եթե

ա) $a = 15$, $b = 10$, $c = 4$; բ) $a = 21$, $b = 28$, $c = 8$:

841.* Դաշտը բաժանված է երեք հողամասի: Օրվա ընթացքում վարեցին առաջին հողամասի կեսը, երկրորդի $\frac{3}{4}$ մասը և ամբողջ երրորդ հողամասը, որը կազմում էր դաշտի քառորդ մասը: Օրվա ընթացքում վարած տարածքի մակերեսը 2 անգամ մեծ է երկրորդ հողամասի մակերեսից: Օրվա ընթացքում վարած տարածքի մակերեսը դաշտի մակերեսի ո՞ր մասն է կազմում:

842.* Երեք տրակտորային բրիգադ համատեղ դաշտը վարում են 4 օրում: Առաջին և երկրորդ բրիգադը միասին նույն դաշտը վարում են 6 օրում, իսկ առաջին և երրորդ բրիգադը՝ 8 օրում: Մեկ օրում երկրորդ բրիգադը քանի՞ անգամ է շատ վարում երկրորդից:

843. Երկու բնական թվերից փոքրի քառակուսին հավասար է դրանց գումարին, իսկ այդ թվերի տարբերությունը 15 է: Գտեք այդ թվերը:

844. Գտեք այն թիվը, որի

ա) 10%-ը 2 է: բ) 20%-ը 7 է:
գ) 155-ը 1,5 է: դ) 75%-ը 330 է:

845. ա) Գտեք 12-ի 2 %-ը:
բ) 3 ռ-ին 15 ռ-ու ո՞ր տոկոսն է:
գ) Գտեք այն թիվը, որի 8 %-ը հավասար է 32-ի:
դ) 5-ը 4-ից քանի՞ տոկոսով է մեծ:
ե) 8-ը 10-ից քանի՞ տոկոսով է փոքր:
զ) 1 ց-ը 1 տ-ի ո՞ր տոկոսն է:
է) 3,75-ը 7,5-ի ո՞ր տոկոսն է:

ը) Գտեք x թիվը, եթե դրա 12,5 %-ը հավասար է 25-ի:
թ) 0,125-ը արտահայտեք տոկոսով:
ժ) 1,5 %-ը արտահայտեք տասնորդական կոտորակով:
ի) Գտեք 840-ի 25 %-ը:
լ) Ո՞ր թիվն է 20-ից փոքր 20 %-ով:

846. $\frac{1}{8}$ կոտորակն արտահայտեք տոկոսով:

847. 40-ի 5 %-ն է մե՞ծ, թե՞ 5-ի 40 %-ը:

848. Գիրքը վաճառվել է 2 ռ. 70 կ-ով` 10% զեղչով: Որքա՞ն արժեր գիրքը գնի իջեցումից առաջ:

849. ա) Գործարանը պլանով նախատեսված 1200 շարժիչի փոխարեն թողարկեց 1260 շարժիչ: Քանի՞ տոկոսով գործարանը գերակատարեց պլանը:
բ) Բանվորը պլանով պետք է պատրաստեր 800 դետալ, բայց նա պլանը գերակատարեց 5%-ով: Քանի՞ դետալ պատրաստեց:
գ) Դասարանի 40 աշակերտից 4-ը այսօր բացակայում են: Որքա՞ն է հաճախումների տոկոսն այսօր:
դ) Թվի 331/3 %-ը ինչպե՞ս է հարմար գտնել:
ե) 66 2/3 %-ը թվի ո՞ր մասն է:
զ) Եթե թվին գումարենք դրա 10%-ը, կստացվի 330: Գտեք այդ թիվը:
է) Կանաչ խոտը չորանալիս կորցնում է իր զանգվածի 80 %-ը: Որքա՞ն չոր խոտ կստացվի 10 հա մակերեսով մարգագետնից, եթե մեկ հեկտարից միջին հաշվով հնձում են 6 տ կանաչ խոտ:

850. ա) Միևնույն բեռնատարողությամբ 15 մեքենաներով էլևատոր տեղափոխեցին 90 տ հացահատիկ: Որքա՞ն մեքենա է անհրաժեշտ 186 տ հացահատիկն էլևատոր տեղափոխելու համար:
բ) 1 կգ լուծույթը պարունակում է 40 գ աղ: Որքա՞ն աղ է պարունակում այդ լուծույթի 350 գ-ի մեջ:
գ) 5 լ լուծույթում պարունակվում է 80 գ աղ: Որքա՞ն աղ է պարունակվում այդ լուծույթի 4,2 լ-ը:

851. Բրինձը պարունակում է 75 % կրախմալ, իսկ գարին` 60 %:
ա) Որքա՞ն բրինձ պետք է վերցնել, որպեսզի ստանալ այնքան կրախմալ, որքան պարունակվում է 6 կգ գարու մեջ:

բ) Որքա՞ն գարի պետք է վերցնել, որպեսզի ստանալ այնքան կրախմալ, որքան պարունակվում է 8 կգ բրնձի մեջ:

852. ա) Որոշեք ծառի բարձրությունը, եթե հայտնի է, որ այդ ծառի ստվերի երկարությունը 20 մ է, իսկ 1 մ երկարությամբ ձողի երկարությունը՝ 1,4 մ (չափումները կատարված են միաժամանակ):
բ) Որքա՞ն է 12 մ բարձրությամբ ծառի ստվերի երկարությունը, եթե 2 մ երկարությամբ ձողի ստվերի երկարությունը 1,5 մ է:

853. Բանվորը պետք է պատրաստի 200 դետալ: Գրեք պատվերի կատարման ժամանակը աշխատանքի արտադրողականությունից (արտադրողականությունը միավոր ժամանակում պատրաստված դետալների թիվն է) կախվածության բանաձևը:
Ինչպես կփոխվի աշխատանքի կատարման ժամանակը, եթե աշխատանքի արտադրողականությունն ավելանա 1,2, 1,4 և 2 անգամ:

854. ա) Մեկ դետալ պատրաստելու համար բանվորները նախատեսված 20 ր-ի փոխարեն սկսեցին ծախսել 8 ր: Որքան դետալ կպատրաստի բրիգադը մեկ հերթափոխում, եթե առաջ թողարկում էին 120 դետալ: Քանի՞ տոկոսով ավելացավ աշխատանքի արտադրողականությունը:
բ) Գործարանը տարվա պլանը կատարեց դեկտեմբերի 1-ին: Մինչև հունվարի 1-ը գործարանը քանի՞ տոկոսով կկատարի տարվա պլանը, եթե շարունակի աշխատել նույն արտադրողականությամբ:
գ) Ռացիոնալիզատորական առաջարկի ներդրումը թույլ է տալիս մեկ դետալի պատրաստման ժամանակը 12 ր-ից դարձնել 10 ր: Քանի՞ անգամ կավելանա թողարկման նորմը (քանակը): Քանի՞ տոկոսով կկատարվի նախատեսված թողարկման պլանը:
դ) Երկու անիվ միացած են փոկով: Առաջին անիվի շրջանագիծը 60 սմ է, երկրորդինը՝ 40: Րոպեում քանի՞ պտույտ կկատարի երկրորդ անիվը, եթե առաջինը րոպեում կատարում է 240 պտույտ:

855. ա) Երկրագունդը, իր առանցքի շուրջը լրիվ պտույտը կատարում է 24 ժ-ում: Քանի՞ աստիճանով են տարբերվում երկու քաղաքների աշխարհագրական երկայնությունները, եթե դրանց արևային ժամանակների տարբերությունը 8 ժամ է:
բ) Քանի ժ-ով են տարբերվում երկու քաղաքների արևային ժամանակները, եթե դրանց աշխարհագրական երկայնությունները տարբերվում են 60°-ով:

856. Սանկտ Պետերբուրգը գտնվում է 60° արևելյան երկայնության վրա, իսկ Մագադանը՝ 150°։ Գտեք Մագադանում արևային ժամանակը, եթե Սանկտ Պետերբուրգում կեսօր է։

857. Ցիստեռնում (գլանատակառ) 6 լ ջուր կա։ Յուրաքանչյուր րոպե ծորակով այնտեղ լցվում է 4,5 լ ջուր։
ա) Գրեք բաքում ջրի լիտրերի քանակի (y) և ծորակի բաց մնալու ժամանակի (x) կապը։
բ) Գծեք y-ի փոփոխման գրաֆիկը՝ x-ին տալով 0-ից 8 արժեքներ 2 քայլով։
գ) Գրաֆիկով գտեք՝ որքան ջուր կլինի բաքում 1 րոպե, 5 րոպե հետո։
դ) Քանի՞ րոպե հետո բաքում կլինի 40 լ ջուր (հաշվարկը կլորացրեք 1 ր-ի ճշտությամբ)։
ե) Քանի՞ ր հետո բաքը կլցվի, եթե տարողությունը 100 լ է (կլորացրեք 1 ր-ի ճշտությամբ)։

858. Մի ցիստեռնում 32 տ բենզին է, մյուսում՝ 36 տ։ Առաջինից յուրաքանչյուր րոպեում դատարկում են 200 կգ, իսկ երկրորդից՝ 300 կգ բենզին։ Որքա՞ն ժամանակ հետո ցիստեռներում բենզինի քանակը կհավասարվի։

859. Բանալիների 15 օղակների պատրաստման համար անհրաժեշտ է 18 դմ մետաղալար։ Քանի՞ օղակ կստացվի 24 դմ մետաղալարից։

860. Քանի՞ կգ հաց կարելի է ստանալ 850 գ ցորենից, եթե 10 կգ ցորենից ստացվում է 8 կգ ալյուր, իսկ 6 կգ ալյուրից՝ 9 կգ հաց։

861. 32 կգ կաթից ստացվում է 4 կգ կաթնասեր, 35 կգ կաթնասերից՝ 7 կգ յուղ, իսկ 16 կգ յուղից ստացվում է 12 կգ հալած յուղ։ Քանի՞ կգ հալած յուղ կստացվի 3000 կգ կաթից։

862. Թխված է 400 կգ հաց։ Սառչելուց հետո հացը կորցնում է իր զանգվածի 2,75 %-ը։ Քանի՞ կգ-ով փոքրացավ հացի զանգվածը։

863. 4 լ տաք ջուրը խառնեցին 3 լ 10 °C ջերմաստիճան ունեցող ջրի հետ։ Խառնուրդի ջերմաստիճանը դարձավ 40 °C։ Գտեք տաք ջրի ջերմաստիճանը։

864. 0,1 ճշտությամբ հաշվեք արտադրանքի իրացման պլանի կատարման տոկոսը յուրաքանչյուր եռամսյակում հետևյալ տվյալների հիման վրա.

Եռամսյակ	Իրացումը 1000 ռ		Կատարումը %-ով
	Պլան	Փաստացի	
I	1200	1280	
II	1400	1450	
III	1300	1280	
IV	1400	1650	

865. Երկու արտադրամասեր պլանով մեկ տարում պետք է թողարկեին 180 հաստոց: Առաջին արտադրամասը պլանը կատարեց 112 %-ով, իսկ երկրորդը՝ 110, այդ պատճառով երկուսով մեկ տարում թողարկեցին 200 հաստոց: Պլանից դուրս քանի՞ հաստոց թողարկեց յուրաքանչյուր արտադրամաս:

866. Որքա՞ն պետք է լինի 20 լ ջրի ջերմաստիճանը, որպեսզի 10 լ 20 °C ջերմաստիճանով ջրի հետ խառնելիս ստացվի 35 °C-ից ոչ պակաս և 45°C-ից ոչ ավելի ջերմաստիճանով ջուր:

867. Երկու տղա ճոճվում են գերանի վրա դրված տախտակին նստած: Տախտակի երկարությունը 5,5 մ է: Ի՞նչ տեղում պետք է լինի տախտակի հենակետը (գերանի վրա), որպեսզի տղաները գտնվեն հավասարակշռության մեջ, եթե նրանցից մեկը կշռում է 45 կգ, մյուսը՝ 40:

868. Ուղղաձիգ լծակի ծայրերից կախված են հավասարակշռության մեջ գտնվող երկու բեռներ, ընդ որում՝ լծակի հենակետը մի ծայրից հեռացված է 5 դմ, մյուսից՝ 7: Եթե մեծ զանգվածով բեռն ավելացվի 2 կգ-ով, փոքր զանգվածովը փոքրացվի 2-ով, ապա հավասարակշռությունը պահպանելու համար հենակետը պետք է տեղաշարժել 1 դմ-ով: Որոշեք յուրաքանչյուր բեռան զանգվածը:

869. Մարդատար և բեռնատար գնացքների արագությունները հարաբերում են ինչպես 5:3: Մարդատար գնացքը կայարանից դուրս եկավ բեռնատարից 0,5 ժամ ուշ, բայց հաջորդ կայարան հասավ բեռնատարից 0,5 ժամ շուտ: Գտեք գնացքների արագությունները (համարելով դրանք հաստատուն), եթե կայարանների հեռավորությունը 75 կմ է:

870. Առվակից 6 մ հեռավորության վրա աճում էր 20 մ բարձրությամբ ծառ: Բուքը ծառը ջարդեց այնպես, որ ծառի գագաթն ընկավ առվի՝ ծառին մոտակա ափի վրա: Ի՞նչ բարձրության վրա էր ջարդվել ծառը:

871. 7,5 մ երկարությամբ աստիճանը պատին հենված է այնպես, որ հիմքը պատից հեռացված է 2,5 մ-ով: Քանի՞ մ կիջնի աստիճանի վերին եզրը, եթե հիմքը պատից հեռացվի ևս 3,5 մ-ով:

872. Գտեք երկու թվեր, որոնց քառակուսիների գումարը 145, իսկ քառակուսիների տարբերությունը՝ 17:

873. Երկու թվերի քառակուսիների տարբերությունը 1029 է, իսկ այդ թվերը հարաբերում են ինչպես 2 : 5: Գտեք այդ թվերը:

874.* Երկնիշ թվի թվանշանների գումարը 29-ով փոքր է թվանշանների արտադրյալից և 72-ով թվանշանների քառակուսիների գումարից: Գտեք այդ թիվը:

875. Երկնիշ թվի թվանշանները տեղափոխելուց հետո ստացված թիվը 18-ով փոքր է տրված թվից: Այդ թվերի արտադրյալը 126 անգամ մեծ է թվերի թվանշանների արտադրյալից: Գտեք երկնիշ թիվը:

876.* Ալյոշան 3 տարով մեծ է Բորյայից և 6 տարով Վովայից: Գրիշայի և Բորյայի տարիքների արտադրյալը 9-ով մեծ է Ալյոշայի և Վովայի տարիքների արտադրյալից: Քանի՞ տարով է Ալյոշան մեծ Գրիշայից:

877.* Ալյոշան 3 տարով մեծ է Բորյայից և 6 տարով՝ Վովայից: Գրիշայի և Բորյայի տարիքների արտադրյալը 20-ով մեծ է Ալյոշայի և Վովայի տարիքների արտադրյալից: Քանի՞ տարեկան է Գրիշան:

878.* Սաշան ասաց. «Իմ փոքր եղբոր տարիքը 7-ից մեծ է, իսկ մեր տարիքների քառակուսիների գումարը 20 անգամ մեծ է իմ տարիքից»: Քանի՞ տարեկան է Սաշան:

879.* Վասյան մեր դասարանի տղաների և աղջիկների քանակները քառակուսի բարձրացրեց: Ստացված թվերի գումարը 25 անգամ մեծ է տղաների թվից: Քանի՞ տղա կա մեր դասարանում, եթե աղջիկների թիվը մեծ է տասից, իսկ տղաները ավելի շատ են, քան աղջիկները:

880.* Հովիվը նկատեց, որ իր ոչխարների քանակի և այդ քանակից մեկով փոքր թվի արտադրյալը 15-ով մեծ է իր տարիքի և ոչխարների թվից, 2-ով փոքր թվի արտադրյալից: Քանի՞ տարեկան է հովիվը:

881.* Երկու գործարար ընդհանուր գործի մեջ ներդրեցին 48 հազարական ռուբլի: Առաջինը մեկ տարի հետո ետ վերցրեց իր գումարը (առանց եկամտի), երկրորդը՝ երկու տարի հետո: Ինչպես պետք է նրանք բաժանեն իրար մեջ 42 հազար եկամուտը, որը ստացվել է նրանց ներդրումից երկու տարում:

882.* Երկու գործարար ներդրումներ կատարեցին ընդհանուր գործում: Առաջինը ներդրեց 40 հազար ռուբլի, երկրորդը՝ 60 հազար: Մեկ ամիս հետո առաջինը ետ վերցրեց իր գումարը (առանց եկամտի), իսկ ևս մեկ ամիս հետո նրանք որոշեցին իրար մեջ բաժանել երկու ամսում ստացված եկամուտը: Ինչպե՞ս դա պետք է անել, եթե եկամուտը 17 000 ռ. է:

883.* Մի ինչ-որ ձեռնարկումից ստացված է կայուն եկամուտ: Առաջին գործընկերը ներդրեց 9 հազար ռուբլի, երկրորդը՝ 2 հազար: Առաջինը իր ներդրած գումարը ետ վերցրեց մեկ ամիս հետո (առանց եկամտի), երկրորդը՝ երկու ամիս անց: Դրանից հետո նրանք բաժանեցին ստացված եկամուտը: Ինչպիսի՞ն է ամսական շահույթի տոկոսը, եթե առաջինի եկամուտը 2,5 անգամ շատ է երկրորդի եկամտից:

884. Երկու պատշար պատը շարում են երեք օրում: Քանի՞ օրում կշարեն պատը երեք պատշար, եթե նրանց բոլորի արտադրողականությունը նույնն է:

885. Երեք բանվորներից առաջինն աշխատանքը կարող է կատարել 12 ժամում, երկրորդը՝ 15, երրորդը՝ 20: Համատեղ աշխատելով քանի՞ ժամում կկատարեն այդ աշխատանքը:

886.* Երկու բրիգադ համատեղ աշխատելով, ճանապարհը կարող են վերանորոգել 18 աշխատանքային օրում: Եթե առաջին բրիգադը կատարի աշխատանքի $\frac{2}{3}$ մասը, այնուհետև մնացած մասը՝ երկրորդը, ապա ճանապարհի վերանորոգումը կտևի 40 օր: Առանձին աշխատելով յուրաքանչյուր բրիգադ քանի՞ օրում կկատարի այդ աշխատանքը:

887. Երեք տրակտորային բրիգադ միասին դաշտը վարում են 4 օրում: Առաջին և երկրորդ բրիգադը դաշտը կարող են վարել 6 օրում, իսկ առաջինը և երրորդը՝ 8 օրում:
Երկրորդ և երրորդ բրիգադներից ո՞րն է 1 օրում ավելի շատ վարում և քանի՞ անգամ շատ:

888. Ճանապարհի առաջին 96 կմ տեղամասը գնացքը 2 կմ/ժ-ով մեծ արագությամբ էր գնում, քան 69 կմ երկարությամբ երկրորդ տեղամասը: Ամբողջ ճանապարհին անցավ 3 ժ 30 րոպեում: Գտեք գնացքի արագությունը ճանապարհի երկրորդ մասում:

889. Մոտորանավակը, որի սեփական արագությունը 20 կմ/ժ է, երկու մատույցների միջև եղած հեռավորությունը գետի հոսանքով գնաց և վերադարձավ (առանց կանգ առնելու) 6 ժ 15 րոպեում: Նավամատույցների հեռավորությունը 60 կմ է: Գտեք գետի հոսանքի արագությունը:

890. 75 տ բեռ տեղափոխելու համար հատկացրին մի քանի բեռնատար: Սակայն 5 բեռնատար տեղափոխեցին այլ տեղամաս, և այդ պատճառով մնացած բեռնատարները 0,5 տ-ով ավելի բեռնեցին, քան ենթադրվում էր: Քանի՞ բեռնատար օգտագործվեց բեռը տեղափոխելու համար:

891. Եթե A քաղաքից B գնացող գնացքը շարժման արագությունը փոքրացնի 10 կմ/ժ-ով, ապա A-ից B գնալու ժամանակը կավելանա 25%-ով: Գտեք գնացքի շարժման արագությունը:

892°. Ցելսիուսի ջերմաչափով սառույցի հալման և ջրի եռման ջերմաստիճանները համապատասխանաբար նշանակված են 0° և 100°: Ֆարենգեյտի ջերմաչափում այդ ջերմաստիճանները համապատասխանաբար նշանակված են –32° և 212°: Ի՞նչ ջերմաստիճանի դեպքում երկու ջերմաչափերն էլ ցույց կտան նույն աստիճանը:

893.* A տիպի էլեկտրաշարժիչի արտադրության համար օգտագործվում է 20% պղինձ պարունակող 7 կգ համաձուլվածք: B տիպի էլեկտրաշարժիչի արտադրության համար օգտագործվում է 60% կապար և 40% պղինձ պարունակող 2 կգ համաձուլվածք: A կամ B տիպի մեկ էլեկտրաշարժիչի արտադրությունից ստացված շահույթը համապատասխանաբար կազմում է 8 կամ 12 ռ.: Յուրաքանչյուր տիպի քանի՞ էլեկտրաշարժիչ պետք է պատրաստել 1000 ռ. շահույթ ստանալու համար, ընդ որում՝ ծախսելով ոչ ավելի քան 84 կգ կապար և ոչ ավելի, քան 111 կգ պղինձ:

894. Գտեք այնպիսի չորս թիվ, որ դրանց բոլոր հնարավոր եռյակների գումարները լինեն համապատասխանաբար 20, 22, 24, 27:

895. Քառանկյան 3 հաջորդական կողմերի գումարները համապատասխանաբար հավասար են 130, 135, 147, 152 սմ: Գտնել քառանկյան յուրաքանչյուր կողմի երկարությունը:

896. 100 մ երկարությամբ շրջանագծով շարժվում են երկու կետ: Նույն ուղղությամբ շարժվելիս հանդիպում են 20 վայրկյանը մեկ, հակառակ ուղղություններով շարժվելիս՝ 4 վայրկյանը մեկ: Գտեք յուրաքանչյուր կետի արագությունը:

897. 720 ռ-ով պետք է ձեռք բերվի մի քանի ռադիոընդունիչ, բայց դրանցից յուրաքանչյուրի գինն իջավ 24 ռ-ով, և այդ պատճառով գնեցին նախատեսվածից մեկ ռադիոընդունիչ ավելի: Քանի՞ ռադիոընդունիչ գնեցին, եթե դրանք ունեին նույն գինը:

898. Շենք կառուցելու համար որոշակի ժամանակում պետք էր քանդել 8000 մ^3 հող: Աշխատանքն ավարտվեց նախատեսվածից 8 օր շուտ, քանի որ բրիգադն օրվա պլանը գերակատարում էր 50 մ^3-ով: Գտեք, թե ինչ ժամանակում էր նախատեսված կատարել աշխատանքը և որոշեք օրվա պլանի կատարման տոկոսը:

899. Տրակտորիստների բրիգադը պետք է վարեր 120 հա մակերեսով խոպան տեղամասը: Սակայն բրիգադին հաջողվեց օրական նախատեսված առաջադրանքն ավելացնել 2 հա-ով: Արդյունքում վարելու համար նախատեսված ժամանակը կրճատվեց 2 օրով: Որքա՞ն էր բրիգադի օրական առաջադրանքը, և որքա՞ն ժամանակում պետք էր ավարտել աշխատանքը:

900. Անտառահատների բրիգադը պլանով մի քանի օրում պետք է կուտակեր 216 մ^3 փայտ: Առաջին երեք օրը բրիգադն աշխատում էր ըստ պլանի, իսկ հետո ամեն օր պլանից 8 մ^3-ով ավելի էր պատրաստում: Արդյունքում ժամկետից 1 օր առաջ բրիգադը կուտակեց 232 մ^3 փայտ: Պլանով մեկ օրում որքա՞ն փայտ պետք է կուտակեր բրիգադը:

901. Բեռնված ավտոմեքենան հաստատուն արագությամբ անցավ 140 կմ: Բեռը դատարկելուց հետո ետ վերադառնալիս, ավտոմեքենան 20 կմ/ժ-ով ավելացրեց արագությունը և դրա հետևանքով 48 ր քիչ ծախսեց: Գտեք ավտոմեքենայի սկզբնական արագությունը:

902. A վայրից B վայր մեկնեց հեծանվորդը, իսկ քառորդ ժամ անց նրա ետևից շարժվեց ավտոմեքենան: A-ից B ճանապարհի մեջտեղում ավտոմեքենան հասավ հեծանվորդին: Երբ ավտոմեքենան հասավ B, հեծանվորդին դեռ մնում էր անցնելու ճանապարհի $\frac{1}{3}$ մասը: Որքա՞ն ժամանակ ծախսեց A-ից B ճանապարհի վրա հեծանվորդը, և

որքա՞ն ավտոմեքենան, եթե հայտնի է, որ նրանց արագությունները հաստատուն էին:

903. Հեծանիվի անիվի տրամագիծը 70 սմ է: Գտեք շրջանագծի երկարությունը: Քանի՞ պտույտ կկատարի անիվը 1 րոպեում, եթե հեծանվորդի արագությունը 7 մ/վրկ է:

904. Երկրի ուղեծիրը կարելի է մոտավորապես համարել 150 մլն կմ շառավղով շրջանագիծ: 10 մլն կմ ճշտությամբ որոշեք երկրագնդի անցած ճանապարհը մեկ տարում: 0,01 մլն կմ ճշտությամբ որոշեք երկրագնդի անցած ճանապարհը 1 օրում, 1 ժամում, 0,5 ժամում:

905. ա) 2 մ պողպատյա ճոպանի զանգվածը 4,63 կգ է: Որքա՞ն է ճոպանի երկարությունը 50 կգ զանգվածով ճոպանի փաթույթում:
բ) 2 մ պողպատյա ճոպանի զանգվածը 6,4 կգ է: Որքա՞ն է ճոպանի երկարությունը, եթե զանգվածը 1 ց է:

906. 18 մմ տրամագծով մեկ գծամետր խողովակի զանգվածը 3,2 կգ է: Որքա՞ն է նույն տրամագծով 1,6 մ երկարությամբ խողովակի զանգվածը:

907. ա) 200 կմ ճանապարհն անցան 4 ժամում: Ինչպիսի՞ն է շարժման միջին արագությունը:
բ) Այդ արագությամբ որքա՞ն ժամանակում կարելի էր անցնել 60 կմ, 120 կմ, 140 կմ:

908. Շերամի բոժոժն ունի 0,05 գ զանգված և տալիս է 450 մ մետաքսաթել: Քանի՞ մետր մետաքսաթել կտան 100 գ ընդհանուր զանգվածով բոժոժները:

909. 4 մարդու համար կեքս պատրաստելու բաղադրատոմսն է՝ 120 գ մարգարին, 120 գ շաքար, 120 գ թթվասեր, 120 գ ալյուր և 2 ձու: Որքա՞ն մարգարին, շաքար, թթվասեր, ալյուր և ձու է անհրաժեշտ

ա) 48, բ) 42, գ) 60, դ) 57 մարդու համար կեքս պատրաստելիս:

910. ա) Երկաթի խտությունը 7800 կգ/մ^3 է: Որքա՞ն է 1 տ երկաթի ծավալը:
բ) Ոսկու խտությունը 19300 կգ/մ^3 է: Գտեք 3, 2, 12 սմ չափերով ոսկու ձուլի զանգվածը: Որքա՞ն է 100 կգ զանգվածով ոսկու ձուլվածքի ծավալը:

911. ա) 1 խորանարդ մետր ալյումինի զանգվածը 2700 կգ է: Որքա՞ն է 1 սմ^3 ծավալով ալյումինի զանգվածը:

բ) Սնդիկի 1 խորանարդ մետրի զանգվածը 13,6 տ է: Որքա՞ն է 760 մմ բարձրությամբ սնդիկի սյան զանգվածը, եթե սյան հիմքի մակերեսը 1 մմ^2 է:

912. Երկիրն իր առանցքի շուրջը պտույտ է (360°) կատարում 24 ժամում: Քանի՞ աստիճանի անկյունով կպտտվի 3 ժամում:

913. Ներկի տոկոսային պարունակությունները (ըստ զանգվածի) երեք լուծույթներում կազմում են երկրաչափական պրոգրեսիա: Եթե առաջին, երկրորդ և երրորդ լուծույթները խառնվեն 2 : 3 : 4 հարաբերությամբ, ապա կստացվի 32% ներկ պարունակող լուծույթ: Իսկ եթե դրանք խառնվեն 3 : 2 : 1 հարաբերությամբ, կստացվի 22% ներկ պարունակող լուծույթ: Քանի՞ տոկոս ներկ է պարունակում առաջին լուծույթը:

914. A վայրից B վայրը 100 կմ է: A-ից դեպի B և B-ից դեպի A միաժամանակ իրար դիմաց դուրս եկան մոտոցիկլավարը և հեծանվորդը: Որոշ ժամանակ անց նրանք հանդիպեցին A-ի և B-ի միջև գտնվող C վայրում, և շարունակելով իրենց ճանապարհները՝ հասան նախատեսված վայրերը: Հաջորդ օրը մոտոցիկլավարը վերադարձավ A, իսկ հեծանվորդը՝ B վայր: Ընդ որում՝ մոտոցիկլավարը $\frac{3}{2}$ անգամ ավելի արագ էր գնում, քան նախորդ օրը, և այդ պատճառով B-ից A ամբողջ ճանապարհի վրա ծախսեց 10 ր պակաս, քան առաջին օրը A-ից C ճանապարհի վրա: Հեծանվորդի արագությունը երկրորդ օրը 10 կմ/ժ-ով ավելի էր, քան նախորդ օրը, և A-ից B ամբողջ ճանապարհի վրա նա ծախսեց $\frac{5}{2}$ անգամ ավելի ժամանակ, քան առաջին օրը ծախսել էր B-ից C ճանապարհի վրա: Ի՞նչ արագությամբ էր շարժվում մոտոցիկլավարը առաջին օրը A-ից B ճանապարհին:

915. Իրարից 34 կմ հեռավորության վրա գտնվող A և B վայրերից իրար դիմաց միաժամանակ դուրս եկան երկու հետիոտն: A-ից 4 կմ հեռավորության վրա առաջին հետիոտնը (որը դուրս էր եկել A-ից) 1 ժամ 30 ր կանգ առավ: Դրանից հետո նա արագությունը մեծացրեց 2 կմ/ժ-ով և հանդիպեց երկրորդ հետիոտնին B-ից 18 կմ հեռավորության վրա: Եթե առաջին հետիոտնը կանգ չառներ և ամբողջ ժամանակ քայլեր սկզբնական արագությամբ, ապա հետիոտները կհանդիպեին ճանապարհի մեջտեղում: Գտեք երկրորդ հետիոտնի արագությունը:

916. Նույն գործվածքի երկու կտորներ միասին արժեն 91 ռ.: Երբ առաջին կտորից վաճառեցին այնքան, որքան սկզբում կար երկրորդում, իսկ երկրորդից՝ առաջինի սկզբում եղածի կեսի չափ, ապա առաջին կտորից մնացածը 10 մ-ով ավելի էր, քան երկրորդ կտորից մնացածը: Քանի՞ մ գործվածք կար յուրաքանչյուր կտորում, եթե գործվածքի 1 մ-ը արժեր 1,4 ռ.:

917. A և B նավամատույցների հեռավորությունը 48 կմ է: Առավոտյան ժամը 9-ին ջերմանավը հոսանքի ուղղությամբ լողաց A-ից B: 1 ժամ կանգնելով B նավամատույցում՝ ջերմանավը վերադարձավ և հասավ A նույն օրվա ժամը 17-ին: Հոսանքի արագությունը 2 կմ/ժ է: Գտեք ջերմանավի սեփական արագությունը:

918.* A վայրից 525 կմ հեռավորության վրա գտնվող B վայր դուրս եկավ մոտոցիկլավարը: Որոշ ժամանակ անց B-ից A մեկնեց ավտոմեքենան, որը հանդիպեց մոտոցիկլավարին այն պահին, երբ նա անցել էր A-ից B հեռավորության $\frac{3}{7}$ մասը: Մոտոցիկլավարը և ավտո մեքենան շարունակեցին իրենց ճանապարհները և մոտոցիկլավարը հասավ B 3 ժամ այն բանից հետո, երբ ավտոմեքենան հասավ A: Եթե ավտոմեքենան B-ից դուրս գար 1,5 ժամ շուտ, քան իրականում դուրս էր եկել, ապա մոտոցիկլավարին կհանդիպեր A-ից 180 կմ հեռավորության վրա: Գտեք մոտոցիկլավարի արագությունը:

919. A վայրից B վայր հեռավորությունը 20 կմ է: Միաժամանակ իրար դիմաց այդ վայրերից դուրս եկան հետիոտն ու հեծանվորդը և հանդիպեցին 50 ր հետո: Որքա՞ն ժամանակում հեծանվորդը կանցնի A-ից B ճանապարհը, եթե հայտնի է, որ հեծանվորդին դրա համար անհրաժեշտ է 4 ժ քիչ ժամանակ: Խնդրի ո՞ր պայմանն է ավելորդ:

920. ա) 10 000 լ տարողությամբ բաքը երկու պոմպերով լցվում է բենզինով: Երկրորդ պոմպը րոպեում 10 լ քիչ է լցնում, քան առաջինը: 5 րոպեում երկու պոմպերով լցվում է բաքի 25%-ը: Քանի՞ լ է լցնում պոմպերից յուրաքանչյուրը 10 րոպեում:

բ) Երկու ծորակներով ավազանը լցվում է 1 ժ 20 րոպեում, իսկ միայն առաջին ծորակով՝ 2 ժամում: Քանի՞ ժամում կլցվի ավազանը երկրորդ ծորակով:

գ) Բաքը երկու խողովակներով լցվում է 12 ժամում: Քանի՞ ժամում կլցվի բաքը, եթե երկու ժամ միացնեն երկու ծորակները, որից հետո միայն մեկը, որով միավոր ժամանակում լցվում է ջրի այն քանակության $\frac{2}{3}$-ը, որով լցվում է երկրորդ խողովակով:

դ) Ավազանին միացված են երեք խողովակներ: Առաջինով ավազանը լցվում է 6 ժամում, երկրորդով՝ 8, իսկ երրորդով լիքը ավազանը դատարկվում է 12 ժամում: Քանի՞ ժամում կլցվի ավազանը, եթե երեք խողովակները միաժամանակ գործեն:

921. ա) Աղաթթվի 30% լուծույթը խառնեցին 10% լուծույթի հետ և ստացան 600 գ 15% լուծույթ: Յուրաքանչյուր լուծույթից քանի՞ գ էր վերցված:
բ) Ծովի ջուրը պարունակում է 5% աղ (ըստ զանգվածի): Որքա՞ն թորած ջուր պետք է ավելացնել 50 գ ծովի ջրին, որպեսզի աղի պարունակությունը կազմի 2%:
գ) Սրվակում կար 12 լ աղաթթու: Աղաթթվի մի մասը դատարկեցին և տեղը լցրին նույնքան մաքուր ջուր: Այնուհետև դատարկեցին նույնքան և տեղը մաքուր ջուր լցրին: Որքա՞ն հեղուկ էին դատարկում յուրաքանչյուր անգամ, եթե արդյունքում սրվակում ստացվեց աղաթթվի 25% լուծույթ:

922. ***«Հաշվի արվեստի ինը բաժինները» աշխատությունից*** (Չինաստան): 5 ցուլը և 2 ոչխարը արժեն 11 տաէլեյ (դրամական միավոր է), իսկ 2 ցուլը և 8 ոչխարը՝ 8 տաէլեր: Առանձին որքա՞ն արժեն ցուլը և ոչխարը:

923. 7 մ^3 կեչու և 5 մ^3 սոճու փայտերը միասին կշռում են 7,44 տ, իսկ 9 մ^3 կեչու և 10 մ^3 սոճու փայտերը՝ 11,28 տ: Որքա՞ն են կշռում 1 մ^3 կեչու և 1 մ^3 սոճու փայտերը:

924. Արձակուրդներին դասարանի աշակերտները, բացի մի քանիսից, որոնք մնացին տանը, գնացին զբոսնելու: 12 աշակերտ՝ բոլոր աղջիկների $\frac{1}{3}$ մասը և բոլոր տղաների կեսը, կինո գնացին, իսկ ևս 13 աշակերտ՝ բոլոր աղջիկների կեսը և բոլոր տղաների $\frac{1}{3}$ մասը՝ գնացին ցուցահանդես: Քանի աշակերտ մնաց տանը:

925. ***Հնագույն խնդիր:*** Գյուղացին ձի գնելու համար հացահատիկ է վաճառում: Եթե նա վաճառի 15 ց հացահատիկ, ապա նրան ձի գնելու համար կպակասի 80 ռ., իսկ եթե վաճառի 80 ց. հացահատիկ, ապա ձին գնելուց հետո իր մոտ կմնա 110 ռ: Որքա՞ն արժի ձին:

926. ***Հնագույն խնդիր:*** Մի մարդ յուղ էր գնում: Եթե գներ 8 տակառ յուղ, ապա նրա մոտ կմնար 20 ալտին, իսկ եթե գներ 9 տակառ յուղ, ապա կպակասեր 1,5 ռուբլի և 1 գրիվեն: Ինչքա՞ն փող նա ուներ: (1 ալտին = 3 կոպ, 1 գրիվեն = 10 կ, 1 ռ. = 100 կոպ):

927.* Եթե վաճառվի 20 կով,, ապա կուտակած անասնակերը (խոտը) կբավարարի նախատեսվածից 10 օր շատ, իսկ եթե գնվի 30 կով, ապա խոտի պաշարը նախատեսվածից 10 օր շուտ կվերջանա: Որքա՞ն կով կար, և քանի՞ օրվա համար էր նախատեսված խոտը:

928.* Եթե վաճառվի 20 կով, ապա կուտակված խոտը կբավարարի 20 օր շատ, իսկ եթե կովի օրական պաշարը պակասեցվի 20 %-ով՝ խոտը փոխարինելով այլ կերերով, ապա խոտը կովերին կբավարարի 15 օր նախատեսվածից երկար: Որքա՞ն կով կար, և քանի՞ օրվա համար էր նախատեսված խոտը:

929. ***Լ.Ֆ. Մագնիցկիի «Թվաբանություն»-ից:*** Երեք մարդ ցանկանում են հողամաս գնել: Առաջին գնորդն ասում է երկրորդին. «Եթե ինձ տաս քո փողերի $\frac{3}{4}$ մասը, ապա կվճարեմ ամբողջ հողամասի համար»: Երկրորդը ասում է երրորդին. «Ինձ տուր քո փողերի $\frac{2}{5}$ մասը, և ես կվճարեմ ամբողջ հողամասի համար»: Երրորդն ասում է առաջինին. «Տուր ինձ քո փողերի $\frac{1}{3}$ մասը, և ես կգնեմ հողամասը»: Իսկ հողամասի գինը 100 ռ է: Գնորդներից յուրաքանչյուրը որքա՞ն փող ուներ:

930. Երեք ընկեր ուզում էին գնել 17 ռ. արժողությամբ գիրքը, բայց ոչ ոք այդքան գումար չուներ: Առաջինն ասում է ընկերներին. «Յուրաքանչյուրդ տվեք ինձ ձեր փողերի կեսը, և ես կգնեմ գիրքը»: Երկրորդն ասում է. «Տվեք ինձ ձեր փողերի $\frac{1}{3}$ -ը և ես կգնեմ գիրքը»: Երրորդն ասում է. «Տվեք ինձ ձեր փողերի քառորդ մասը, և ես կգնեմ գիրքը»: Որքա՞ն փող ուներ նրանցից յուրաքնչյուրը»:

931. ***Ի. Նյուտոնի «Համընդհանուր թվաբանություն»-ից:*** Մի մարդ 15 ֆունտ 12 շիլլինգով (1 ֆունտ = 20 շիլլինգ (դրամական միավոր են) գնում է 40 չափ ցորեն, 24 չափ գարի և 20 չափ վարսակ: Այնուհետև նա կատարում է երկրորդ գնումը՝ 26 չափ ցորեն, 30 գարի և 50 վարսակ 16 ֆունտով: Վերջապես նա 34 ֆունտով գնում է 24 չափ ցորեն, 120 գարի և 100 վարսակ: Որքա՞ն արժեր հացահատիկների յուրաքանչյուր չափը:

932. ա) Եթե ուղղանկյան երկարությունը փոքրացվի 1 մ-ով, իսկ լայնությունը մեծացվի 1 մ-ով, ապա ուղղանկյան մակերեսը կմեծանա 5 մ^2-ով: Քանի՞ մ-ով է ուղղանկյան երկարությունը մեծ լայնությունից:

բ) Եթե հայրիկը 2 տարով փոքր լիներ, իսկ մայրիկը՝ 2 տարով մեծ, ապա նրանց տարիքների արտադրյալը 6-ով մեծ կլիներ քան այժմ է: Հայրիկը քանի՞ տարով է մեծ մայրիկից:

933.* ա) Տեսնելով իրենից 64 մ հեռավորության վրա գտնվող կրիային, Աքիլլեսը սկսեց նրան հետապնդել: Կրճատելով իր և կրիայի միջև եղած հեռավորությունը 8 անգամ և գիտակցելով իր առավելությունը՝ նա դադարեցրեց հետապնդումը: Ի՞նչ ճանապարհ անցավ Աքիլլեսը հետապնդումն սկսելու պահից, եթե նրա արագությունը 15 անգամ մեծ է կրիայի արագությունից, ընդ որում՝ Աքիլլեսն ու կրիան շարժվում են ուղղագիծ:

բ) Երբ իրեն մոտեցող Աքիլլեսը գտնվում էր 6 մ հեռավորության վրա, կրիան հասկացավ, որ հետապնդումից չի կարող խուսափել և դատապարտված կանգ առավ: Հետապնդումն սկսելու պահից հաշված ի՞նչ ճանապարհն էր անցել կրիան, եթե նրա արագությունը 17 անգամ փոքր է Աքիլլեսի արագությունից, հետապնդման ընթացքում նրանց հեռավորությունը փոքրացավ 9 անգամ, և նրանք ուղղագիծ էին շարքում:

934. Հացահատիկ ցանելու համար հատկացված է 3 ցանքատարածք, որոնց ընդհանուր մակերեսը 3 անգամ մեծ է երկրորդ տարածքի մակերեսից: 1 օրում ցանվեց առաջին տարածքի կեսը, երկրորդի $\frac{2}{3}$-ը և ամբողջ երրորդ տարածքը: Չցանված մնացած տեղամասի մակերեսը 2 անգամ փոքր է երրորդ տարածքի մակերեսից: Ամբողջ ցանքատարածքի մակերեսի ո՞ր մասն է կազմում 1 օրում ցանված տարածքի մակերեսը:

935. Գործարանում սկզբում աշխատում էր 2 արտադրամաս: Այնուհետև գործարկվեց նաև երրորդը, որի արդյունքով գործարանն արտադրանքի ամսական թողարկումն ավելացրեց 1,6 անգամ: Երրորդ արտադրամասը երկրորդից քանի՞ անգամ ավելի արտադրանք է տալիս մեկ ամսում, եթե հայտնի է, որ 2 ամսում առաջին և երրորդ արտադրամասերը միասին թողարկում են այնքան արտադրանք, որքան երկրորդը՝ կես տարում:

936. Տարբեր հզորության երկու պոմպեր համատեղ ավազանը լցնում են 4 ժամում: Ավազանի կեսը լցնելու համար առաջինին անհրաժեշտ է 4 ժ ավելի, քան երկրորդին ավազանի $\frac{3}{4}$ մասը լցնելու համար: Յուրաքանչյուր պոմպ առանձին քանի՞ ժամում կլցնի ավազանը:

937. Մեկ համաձուլվածքը բաղկացած է երկու մետաղից, որոնց զանգվածները հարաբերում են ինչպես 1 : 2, իսկ մյուս համաձուլվածքում, որը բաղկացած է նույն մետաղներից՝ 2 : 1: Որքա՞ն մաս պետք է վերցնել յուրաքանչյուր համաձուլվածքից, որ նոր ստացված համաձուլվածքը պարունակի 50% յուրաքանչյուր մետաղից:

938.* Անագը բաղկացած է պղնձից և ցինկից: 124 գ անագի կտորը ջրի մեջ սուզելիս կշռից կորցնում է 15 գ, իսկ 89 գ պղնձի կտորը ջրի մեջ սուզելիս կշռից կորցնում է 10 գ: Բացի այդ, հայտնի է, որ ցինկի կտորը ջրի մեջ սուզելիս կորցնում է իր կշռի $\frac{1}{7}$ մասը: Որոշեք՝ որքա՞ն պղինձ և որքա՞ն ցինկ է պարունակում 250 գ անագը:

939.* 13 կգ 410 գ կշռով ոսկու և արծաթի համաձուլվածքը ջրի մեջ սուզելիս կշռում է 12 կգ 510 գ: Գտեք համաձուլվածքում ոսկու և արծաթի կշիռները, եթե հայտնի է, որ ոսկու խտությունը 19,3 գ/սմ^3 է, իսկ արծաթինը՝ 10,5 գ/սմ^3:

940. Ջերմանավը 10 ժամում կարող է անցնել 110 կմ հոսանքի ուղղությամբ և 70 կմ՝ հոսանքին հակառակ, կամ 88 կմ հոսանքի ուղղությամբ և 84 կմ՝ հոսանքին հակառակ: Գտեք ջերմանավի արագությունը ջրի նկատմամբ և գետի հոսանքի արագությունը:

941. Գյուղից քաղաք ճանապարհը սկզբից 15 կմ սարն ի վեր է, այնուհետև 6 կմ՝ սարն ի վար: Հեծանվորդն առանց կանգառի սարն ի վեր գնում է մի հաստատուն արագությամբ, սարն ի վար՝ այլ: Մի ուղղությամբ նա գնաց 3,1 ժ, հակառակ ուղղությամբ՝ 2,5 ժ: Ինչպիսին են հեծանվորդի սարն ի վեր և սարն ի վար արագությունները:

942. ***Հնագույն խնդիր:*** Ցորենը կալսելու համար վարձեցին մի քանի բանվոր: Եթե նրանց թիվը 3-ով փոքր լիներ, ապա 2 օր ավելի կաշխատեին: Իսկ եթե վարձեին չորս բանվոր ավելի, ապա աշխատանքը երկու օր շուտ կավարտվեր: Քանի՞ բանվոր կար, և քանի՞ օր նրանք աշխատեցին:

943. Բեռնատար մեքենան մեկնեց A-ից B: 2 ժ անց B-ից A շարժվեց մարդատար մեքենան, որը A հասավ 1 ժամ ուշ, քան բեռնատարը՝ B: Քանի՞ ժամ տևեց բեռնատարի ուղևորությունը, եթե հանդիպման պահին անցել էր ամբողջ ճանապարհի $\frac{2}{3}$ մասը:

944. Հեծանվորդը գնաց A-ից B և վերադարձավ հաստատուն արագությամբ: Մոտոցիկլավարը AB ճանապարհն անցավ հեծանվորդի արագությունից n անգամ մեծ արագությամբ: Նա մոտոցիկլը թողեց B վայրում և A վերադարձավ ոտքով՝ հեծանվորդի արագությունից n անգամ փոքր արագությամբ: Նրանցից որի՞ ուղևորությունն ավելի երկար տևեց, և քանի՞ անգամ, եթե

ա) $n = 2$; բ) $n = 5$:

945. ա) Ռուսաստանի խնայբանկը 1993 թ. հոկտեմբերի 1-ից դեպոզիտային ավանդի ձևով դրամը պահուստ տալու համար տարվա վեց և երեք ամիսների համար վճարում էր համապատասխանաբար 150, 130 և 120 տոկոսի չափով եկամուտ: Ինչպիսի եկամուտ կարելի էր ստանալ այդ պայմաններով կրկնակի անգամ վեց ամսով և քառակի անգամ 3 ամսով:

բ) Մի քանի ամիս անց դեպոզիտային ավանդների տոկոսադրույքները Ռուսաստանի խնայբանկի կողմից իջեցվեցին և կազմեցին 70, 60 և 50 տոկոս՝ համապատասխանաբար 1 տարով, վեց ամսով և երեք ամսով դեպոզիտային ավանդների համար: Ինչպիսի՞ եկամուտ կարելի էր ստանալ նոր պայմաններում վեց ամսով դրամի կրկնակի ներդրման և երեք ամսով քառակի ներդրման դեպքում:

946.* Ինչպիսի՞ ամենամեծ ամբողջ թվով պետք է արտահայտվի վեց ամսով ավանդի տարեկան տոկոսադրույքը, որպեսզի այդ ավանդի կրկնակի օգտագործումը բերի ավելի քիչ եկամուտ, քան նույն ավանդը p% տոկոսադրույքով մեկ տարի ներդնելու դեպքում: Ինչպիսի՞ ամենամեծ ամբողջ թվով պետք է արտահայտվի երեք ամսով ներդրման տոկոսադրույքը, որպեսզի այդ ավանդի կրկնակի օգտագործումը բերի քիչ եկամուտ, քան վեց ամսով ներդրված ավանդը:

ա) Խնդիրը լուծեք ընդհանուր տեսքով:

բ) Պատասխանը ստացեք $p = 150$ և $p = 70$ դեպքում:

947.* Մի քանի ժամ հորդառատ անձրև էր տեղում: Երբ այն լցրեց բաց ավազանի մի մասը, միացրին ջուրը դուրս մղող պոմպը: Չնայած անձրևը շարունակում էր տեղալ, պոմպը 5 ժամում լրիվ դատարկեց ավազանը: Եթե այդ պոմպի փոխարեն օգտագործվեր 2 անգամ հզոր այլ պոմպ, ապա այն ավազանը կդատարկեր 2 ժամում: Քանի՞ ժամում կդատարկեին ավազանը երկու ծորակները միասին: Ավազանը լցվելու և դատարկվելու պրոցեսները համարեք հավասարաչափ:

948. Համադասարանցիներով շաշկու տուրնիր կազմակերպեցին: Մասնակիցներից յուրաքանչյուրը մնացած բոլորի հետ խաղաց մեկ պարտիա, իսկ ընդամենը խաղացվեց 28 պարտիա: Որքա՞ն էր մասնակիցների թիվը:

949.* Վեց տղա և չորս աղջիկ շաշկու տուրնիր կազմակերպեցին: Մասնակիցներից յուրաքանչյուրը մյուսների հետ խաղաց մեկական պարտիա: Հաղթանակի համար տրվում էր 2 միավոր, ոչ-ոքիի համար` 1, պարտության համար` 0: Աղջիկները միասին հավաքեցին 40 միավոր: Տղանե՞րը աղջիկների հետ խաղալիս ավելի շատ միավոր հավաքեցին, թե աղջիկները, և ինչքանո՞վ ավելի:

950.* Շախմատային մրցաշարում յուրաքանչյուր մասնակից մյուսների հետ խաղաց երկու պարտիա: Հաղթանակի դեպքում տրվում էր 1 միավոր, ոչ-ոքիի դեպքում` $\frac{1}{2}$, պարտության դեպքում` 0: Երեք լավագույն խաղացողները միասին հավաքեցին 24 միավոր, որը մնացած բոլոր մասնակիցների հավաքած միավորների գումարի կեսն է: Քանի՞ մասնակից կար:

951.* 9-ի «Ա» և 9-ի «Բ» դասարանների մի քանի աշակերտ կազմակերպեցին շաշկու մրցաշար: Յուրաքանչյուր մասնակից մյուսների հետ խաղաց մեկական պարտիա: Հաղթանակի համար տրվում էր 2 միավոր, ոչ-ոքիի համար` 1, պարտության համար` 0: 9-ի «Ա» դասարանի աշակերտները միասին հավաքեցին 26 միավոր, իսկ 9-ի «Բ» դասարանի բոլոր աշակերտները, որոնց թիվը 3-ով մեծ էր, հավաքեցին հավասար միավորներ: Քանի՞ մասնակից կար մրցաշարում:

952. ա) Մեր դասարանում 32 աշակերտ կա: 23-ը կատուներ են սիրում, 18-ը` շներ: Ընդ որում` 10 աշակերտ սիրում է և՛ կատու, և՛ շուն: Մեր դասարանից քանի՞սն է սիրում ո՛չ կատու, ո՛չ շուն:
բ) Մեր դասարանում 30 սովորող կա: Թանգարան էքսկուրսիայի գնացին 23-ը, կինո և թանգարան` 6-ը, իսկ 2-ը ոչ կինո գնաց, ոչ էքսկուրսիա: Մեր դասարանից քանի՞սը կինո գնաց:

953.* Մեր դասարանում 20 աշակերտ սիրում է կամ ֆիզիկա, կամ մաթեմատիկա, կամ երկուսը միասին: Ֆիզիկա սիրողների մեջ 50 %-ը սիրում է մաթեմատիկա, իսկ մաթեմատիկա սիրողների մեջ` 25 %-ն է սիրում ֆիզիկա: Մեր դասարանի քանի՞աշակերտ է սիրում և՛ ֆիզիկա, և՛ մաթեմատիկա:

954.* ա) 1-ից 100 բնական թվերից քանի՞սը չի բաժանվում և՛ 3-ի, և՛ 5-ի:

955.* Բուհի ընդունելության քննությունների ժամանակ «գերազանց» գնահատական ստացան մաթեմատիկայից 96 դիմորդ, ֆիզիկայից՝ 74, ռուսաց լեզվից՝ 84, մաթեմատիկայից կամ ֆիզիկայից՝ 150, մաթեմատիկայից կամ ռուսաց լեզվից՝ 152, ֆիզիկայից կամ ռուսաց լեզվից՝ 132, բոլոր երեք առարկաներից՝ 8: Քանի՞ դիմորդ է ստացել գոնե մեկ «գերազանց»: Նրանից քանի՞սն է ստացել միայն մեկ «գերազանց»:

956.* l երկարությամբ զորասյունը շարժվում է x մ/ր արագությամբ: Զորասյան վերջից դեպի սկիզբը սերժանտը շարժվում է y մ/ր արագությամբ և նույն արագությամբ վերադառնում զորասյան վերջը: Գնալ-վերադառնալու վրա սերժանտը ծախսեց t րոպե:
ա) t; l; x; y-ը արտահայտեք մնացած մեծություններով:
բ) Հաշվեք t-ն, եթե $l = 510$, $x = 70$, $y = 100$:

957.* l երկարությամբ զորասյունը հաստատուն արագությամբ շարժվում է մայրուղով: Ցրիչը զորասյան վերջից շարժվեց դեպի սկիզբը: Հասնելով սկիզբին՝ նույն արագությամբ վերադարձավ զորասյան վերջը: Այդ ժամանակում զորասյունն անցավ S ճանապարհ: Գտեք ցրիչի անցած ճանապարհը (գնալու և ետ վերադառնալու), եթե
ա) $l = 400$ մ, $s = 300$ մ; բ) $l = 300$ մ, $s = 400$ մ:

958.* l երկարությամբ զորասյունը հաստատուն արագությամբ շարժվում է մայրուղով: Ցրիչը զորասյան վերջից շարժվեց դեպի սկիզբը: Հասնելով սկիզբին՝ նույն արագությամբ ետ վերադարձավ և հասավ զորասյան վերջը: Հայտնի է, որ ցրիչի արագությունը n անգամ մեծ է զորասյան արագությունից: Գտեք զորասյան անցած ճանապարհն այն ժամանակում, որ ծախսել էր սկիզբ գնալու և ետ վերադառնալու վրա, եթե
ա) $l = 250$ մ, $n = 1{,}5$; բ) $l = 300$ մ, $n = 2$:

959.* ա) Մարգագետնում կանաչ է աճում: 20 կովը ամբողջ կանաչը կուտեն 21 օրում, իսկ 30 կովը՝ 7 օրում: Քանի՞ օրում մարգագետնի ամբողջ խոտը կարող էին ուտել 22 կովը: ⌈(Ենթադրվում է, որ յուրաքանչյուր օր մարգագետնում աճում է նույն քանակով նոր խոտ)⌋:
բ) Մարգագետնում կանաչ է աճում: 6 կովը ամբողջ խոտը կուտեն 6 օրում, իսկ 7 կովը՝ 4 օրում: Քանի՞ կով կարող էին ամբողջ մարգագետնի խոտը ուտել 2 օրում:

գ) Մարգագետնում կանաչ է աճում: 60 կովը այդ մարգագետնում կարող են կերակրվել 14 օր, իսկ 50 կովը՝ 28 օր: Քանի՞ կով կարող են մշտական կերակրվել այդ մարգագետնում, քանի դեռ այնտեղ կանաչ է աճում:

960.* ***Ի. Նյուտոնի խնդիրը:*** Տասներկու ցուլ արոտավայրի $3\frac{1}{3}$ յուգերը[1] ուտում են 4 շաբաթում: Նույն արոտավայրի 10 յուգերը 21 ցուլն ուտում է 9 շաբաթում: Քանի՞ ցուլ արոտավայրի 24 յուգերը կուտի 18 շաբաթում:

961. ա) Գտեք թվաբանական *պրոգրեսիայի* տարբերությունը, եթե հայտնի է, որ հինգերորդ անդամը 19 է, իսկ տասներորդ անդամը՝ 35:
բ) Գտեք թվաբանական *պրոգրեսիայի* տարբերությունը, եթե հայտնի է, որ չորրորդ անդամը –13 է, իսկ տասներորդ անդամը՝ –43:
գ) Թվաբանական *պրոգրեսիայի* տարբերությունը 9,5 է, իսկ տասներկուերորդ անդամը՝ 105,25: Գտեք *պրոգրեսիայի* առաջին անդամը:
դ) $\frac{1}{2}$-ը և $-1\frac{7}{8}$-ը թվաբանական պրոգրեսիայի առաջին և քսաներորդ անդամներն են: Գտեք այդ պրոգրեսիայի տարբերությունը:

962. ա) Թվային ուղղի 7 և 35 թվերի միջև գտեք վեց կետ, որոնց կոորդինատները 7 և 35 թվերի հետ միասին թվաբանական պրոգրեսիայի հաջորդական անդամներ են:
բ) 1 և 6 թվերի միջև գտեք հինգ թիվ, որոնք տրված թվերի հետ լինեն թվաբանական պրոգրեսիայի հաջորդական անդամներ:

963. ա) Ինչպե՞ս կփոխվի վերջավոր թվաբանական պրոգրեսիայի տարբերությունը, եթե դրա անդամները դասավորենք հակառակ կարգով:
բ) Քանի՞ անդամ ունի թվաբանական պրոգրեսիան, եթե ծայրանդամներն են 10-ը և 7,5-ը, իսկ տարբերությունը հավասար է –0,4-ի:

964. Գտեք a_1, ... a_n, ... թվաբանական պրոգրեսիայի ընդհանուր անդամի բանաձևը, եթե հայտնի է, որ

ա) $a_1 = 5$, $a_2 = -5$; բ) $a_1 = -3$, $a_2 = 0$;
գ) $a_1 = 6$, $a_{10} = 33$; դ) $a_4 = -4$, $a_{17} = -17$:

[1] 1 յուգերը մոտավոր 2500 մ² մակերես է (հին հունական մակերեսի միավոր է):

965. Տրված են երկու երկրաչափական պրոգրեսիաներ՝ $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ և $b_1, b_2, ..., b_n, ...$: Հետևյալ հաջորդականությունը երկրաչափական պրոգրեսիա՞ է.

ա) $a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n$; բ) $a_1 - b_1, a_2 - b_2, ..., a_n - b_n$;

գ) $a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, ..., a_n \cdot b_n$; դ) $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, ..., \frac{a_n}{b_n}, ...$ (բոլոր $b \neq 0$):

966. Գտեք $b_1, b_2, ..., b_n, ...$ երկրաչափական պրոգրեսիայի առաջին անդամը և հայտարարը, եթե հայտնի է, որ

ա) $b_1 + b_4 = \frac{7}{16}, b_3 - b_2 + b_1 = \frac{7}{8}$;

բ) $b_2 - b_1 = 2, b_3 - b_1 = 8$:

967. Գտեք b_1, b_2, b_3, b_4 չորս թվերը, եթե հայտնի է, որ b_2, b_3, b_4 թվերը կազմում են երկրաչափական պրոգրեսիա, իսկ b_1, b_2, b_3 թվերը՝ թվաբանական պրոգրեսիա, ընդ որում՝ $b_1 + b_4 = 37$, $b_2 + b_3 = 36$:

968. Գտեք թվաբանական պրոգրեսիա կազմող b_1, b_2, b_3 թվերը, եթե հայտնի է, որ դրանց գումարը 30 է, իսկ $b_1 - 5$, $b_2 - 4$, b_3 թվերը կազմում են երկրաչափական պրոգրեսիա:

969. Գտեք $b_1, b_2, ... b_n$ վերջավոր երկրաչափական պրոգրեսիայի անդամների n թիվը, եթե հայտնի է, որ $b_1 + b_5 = 51$, $b_2 + b_6 = 102$, $S_n = 3069$:

970. Գտեք բոլոր այն x թվերը, որոնք բավարարում են $1 + 7 + 13 + ... + x = 280$ պայմանին:

971. Թվաբանական պրոգրեսիա կազմող երեք թվերի գումարը 2 է, իսկ քառակուսիների գումարը՝ $\frac{14}{9}$: Գտեք այդ թվերը:

972. ա) Թվաբանական պրոգրեսիայի երկրորդ և իններորդ անդամների գումարը 10 է: Գտեք առաջին տասն անդամների գումարը:
բ) Թվաբանական պրոգրեսիայի երրորդ և իններորդ անդամների գումարը 16 է: Գտեք պրոգրեսիայի առաջին 11 անդամների գումարը:

973.* Երկրաչափական պրոգրեսիայի անդամների թիվը զույգ է: Գտեք հայտարարը, եթե
ա) պրոգրեսիայի բոլոր անդամների գումարը 4 անգամ մեծ է կենտ համարներով անդամների գումարից,

բ) պրոգրեսիայի զույգ համարներով բոլոր անդամների գումարը 2 անգամ մեծ է կենտ համարներով անդամների գումարից:

974. ***Ե. Գ. Վոյպյախովսկու*** «Մաքուր մաթեմատիկայի դասընթաց»-ից: Զինվորին առաջին վերքի համար պարգևատրեցին 1 կոպ., երկրորդ վերքի համար` 2, երրորդ վերքի համար 4 և այլն: Զինվորն ընդամենը ստացավ 655 ռ. 35 կոպ.: Որքա՞ն էր նրա վերքերի թիվը:

975. Զբոսաշրջիկների խումբը A քաղաքից դուրս եկավ դեպի a կմ հեռավորության վրա գտնվող B քաղաք: Առաջին օրը խումբն անցավ 40 կմ, իսկ յուրաքանչյուր հաջորդ օրը` 1 կմ-ով ավելի, քան նախորդ օրը: t օր հետո B քաղաքից նույն ուղղությամբ դուրս եկավ զբոսաշրջիկների երկրորդ խումբը, որն առաջին օրն անցավ 30 կմ, իսկ յուրաքանչյուր հաջորդ օրը 2 կմ-ով ավելի, քան նախորդ օրը: Իր դուրս գալուց քանի՞ օր հետո առաջին խումբը կհասնի երկրորդին, եթե

ա) $a = 100$, $t = 1$; բ) $a = 114$, $t = 2$;

գ) $a = 91$, $t = 1$; դ) $a = 131$, $t = 2$:

976. Հաշվեք

ա) $1 + 2 + 3 + 4 + ... + 17 + 18 + 19$;

բ) $30 + 31 + 32 + ... + 47 + 48 + 49 + 50$:

977. Յուրաքանչյուր n բնական թվի համար հաշվեք գումարը.

$$3 + 8 + 13 + ... + (5n - 2):$$

978. Գտեք թվաբանական պրոգրեսիայի առաջին տասնհինգ անդամների գումարը, եթե պրոգրեսիայի երկրորդ անդամը հավասար է 0,5-ի, իսկ տասնչորսերորդ անդամը` 33,5-ի:

979. Գտեք թվաբանական պրոգրեսիայի առաջին հիսուն անդամների գումարը, որի վերջին անդամը 5,8 է, իսկ վերջին երկուսի գումարը` 11,5:

980. Գտեք թվաբանական պրոգրեսիայի տարբերությունը, որի չորրորդ անդամը 1,25 է, իսկ իններորդը` $\frac{5}{6}$:

981. Երեսուն անդամ պարունակող թվաբանական պրոգրեսիայի անդամների գումարը 3645 է: Այդ պրոգրեսիայի առաջին անդամը 20 է: Գտեք երկրորդ անդամը:

982. Վերջավոր թվաբանական պրոգրեսիայի բոլոր անդամների գումարը 28 է, երրորդ անդամը՝ 8, չորրորդը՝ 5: Գտեք պրոգրեսիայի անդամների թիվը և ծայրանդամները:

983. ա) Գտեք բոլոր երկնիշ թվերի գումարը, որոնք 2-ի կամ 3-ի բազմապատիկ են:
բ) Գտեք 7-ին ոչ բազմապատիկ բոլոր եռանիշ թվերի գումարը:

984. Գտեք 3-ին բազմապատիկ բոլոր կենտ եռանիշ թվերի գումարը:

985. Թվաբանական պրոգրեսիայի առաջին 40 անդամների գումարը 340 է, իսկ առաջին 39 անդամների գումարը՝ 325: Գտեք պրոգրեսիայի տարբերությունը:

986. Տրված են a_1, a_2, ... a_n, ... և b_1, b_2, ... b_n, ... երկու թվաբանական պրոգրեսիաներ: Հետևյալ հաջորդականությունը թվաբանական պրոգրեսիա՞ է.
ա) $a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots a_n + b_n, \ldots$;
բ) $a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots a_n - b_n, \ldots$;
գ) $a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \ldots a_n \cdot b_n, \ldots$;
դ) $|a_1|, |a_2|, \ldots |a_n|, \ldots$;
ե) $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}, \ldots$ (բոլորը $b \neq 0$):

987. Ապացուցեք, որ եթե $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{b+a}$ թվերը թվաբանական պրոգրեսիայի հաջորդական անդամներ են, ապա a_2, b_2, c_2 թվերը նույնպես թվաբանական պրոգրեսիայի հաջորդական անդամներ են:

988. a, b, c և $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ թվերը երկու թվաբանական պրոգրեսիաների հաջորդական անդամներ են: Ապացուցեք, որ $a = b = c$:

989. Գտեք a_1, a_2, ..., a_n, ... թվաբանական պրոգրեսիայի առաջին անդամը և տարբերությունը, եթե հայտնի է, որ
ա) $a_2 + a_4 = 16$, $a_1 \cdot a_5 = 28$; բ) $a_1 \cdot a_{11} = 44$, $a_2 + a_{10} = 24$:

990. Գտեք 2-ի և 3-ի չբաժանվող բոլոր երկնիշ թվերի գումարը:

991. Գտեք երկրաչափական պրոգրեսիայի առաջին 11 անդամները, եթե հայտնի է, որ հայտարարը 1,5 է, իսկ վեցերորդ անդամը՝ 2:

992. Որոշեք երկրաչափական պրոգրեսիայի առաջին անդամը, եթե հայտարարը 4 է, իսկ ութերորդ անդամը՝ 256:

993. Երկրաչափական պրոգրեսիայի առաջին անդամը 2058 է, իսկ չորրորդ անդամը՝ 6: Գտեք այդ պրոգրեսիայի հայտարարը:

994. 1 և 14 641 թվերի միջև գտեք երեք թիվ այնպես, որ ստացված թվերը կազմեն երկրաչափական պրոգրեսիա:

995. 15-ը և 240-ը երկրաչափական պրոգրեսիայի ծայրանդամներն են: Պրոգրեսիայի հայտարարը 0,5 է: Քանի՞ անդամ ունի այդ պրոգրեսիան:

996. Գտեք երկրաչափական պրոգրեսիայի անդամների գումարը, եթե հայտարարը 3 է, իսկ ծայրանդամները՝ 20 և 131 220:

997. Երկրաչափական պրոգրեսիայի առաջին անդամը 7 է, իսկ հայտարարը՝ 4: Գտեք պրոգրեսիայի վերջին անդամը, եթե բոլոր անդամների գումարը 9555 է:

998. Գտեք երկրաչափական պրոգրեսիայի վերջին անդամը, եթե առաջին երկու անդամների գումարը 4 է, այդ նույն անդամների տարբերությունը՝ 2, իսկ պրոգրեսիայի անդամների թիվը՝ 8:

999. Յոթ անդամ պարունակող երկրաչափական պրոգրեսիայի հայտարարը 2 է, բոլոր անդամների գումարը՝ 635: Գտեք պրոգրեսիայի վերջին անդամը:

1000. Վեց անդամ պարունակող երկրաչափական պրոգրեսիայի առաջին անդամը 768 է, իսկ վերջին անդամը չորրորդ անդամից 16 անգամ փոքր է: Գտեք պրոգրեսիայի բոլոր անդամների գումարը:

1001. Երկրաչափական պրոգրեսիայի առաջին անդամը $\frac{3}{4}$ է, իսկ վերջին երկու անդամները համապատասխանաբար 750 և 7500: Գտեք պրոգրեսիայի անդամների թիվը:

1002. Երկրաչափական պրոգրեսիայի առաջին անդամը 1 է, վերջին անդամը՝ 64, բոլոր անդամների գումարը՝ 127: Գտեք պրոգրեսիայի անդամների թիվը:

1003. Երկրաչափական պրոգրեսիայի տասներկուերորդ անդամը 1536 է, չորրորդ անդամը՝ 6: Գտեք այդ պրոգրեսիայի առաջին տասնմեկ անդամների գումարը:

1004. Երկրաչափական պրոգրեսիայի յոթերորդ անդամը 27 է, իսկ տասներորդը՝ 729: Գտեք պրոգրեսիայի առաջին տասն անդամների գումարը:

1005. Գտեք երկրաչափական պրոգրեսիայի հայտարարը, որի առաջին երկու անդամների գումարը 16 է, իսկ հինգերորդ և վեցերորդ անդամների գումարը՝ 1296:

1006. Գտեք երկրաչափական պրոգրեսիայի առաջին ութ անդամները, որի առաջին և երկրորդ անդամների արտադրյալը $\frac{1}{3}$ է, իսկ առաջին և հինգերորդ անդամների արտադրյալը՝ $\frac{1}{64}$:

1007. Երկրաչափական պրոգրեսիայի առաջին երեք անդամների գումարը 28 է, իսկ հաջորդ երեք անդամների գումարը 3,5: Գտեք պրոգրեսիայի ութերորդ անդամը:

1008. Գտեք երկրաչափական պրոգրեսիայի առաջին հինգ անդամների գումարը, եթե հայտնի է, որ առաջին անդամը 9 է, իսկ առաջին երեք անդամների գումարը՝ 58, 59:

1009.* ***Արքիմեդի խնդիրը.*** (մ.թ.ա. 287-212 թ.) Գտեք առաջին n բնական թվերի քառակուսիների գումարը:

1010.* ա) Գտեք առաջին n զույգ թվերի քառակուսիների գումարը:
բ) Գտեք առաջին n կենտ թվերի քառակուսիների գումարը:

1011.* ***Հնագույն խնդիր*** (Հնդկաստան, IV դ.): Գտեք առաջին n բնական թվերի խորանարդների գումարը: